Differentialet for $z = f(x,y)$

Givet $z = f(x,y)$, så defineres differentialet df i punktet (a,b) som

$$df = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y.$$

Vi opfatter $df \approx \Delta f = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)$, hvilket giver den lineære approksimation

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y.$$

Approksimationen er *lineær* i Δx og Δy. Differentialet for $z = f(x,y)$ skrives ofte som

$$df = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Relation til tangentplanen

Tangentplanen til $z = f(x, y)$ gennem punktet $(a, b, f(a, b))$ er givet ved

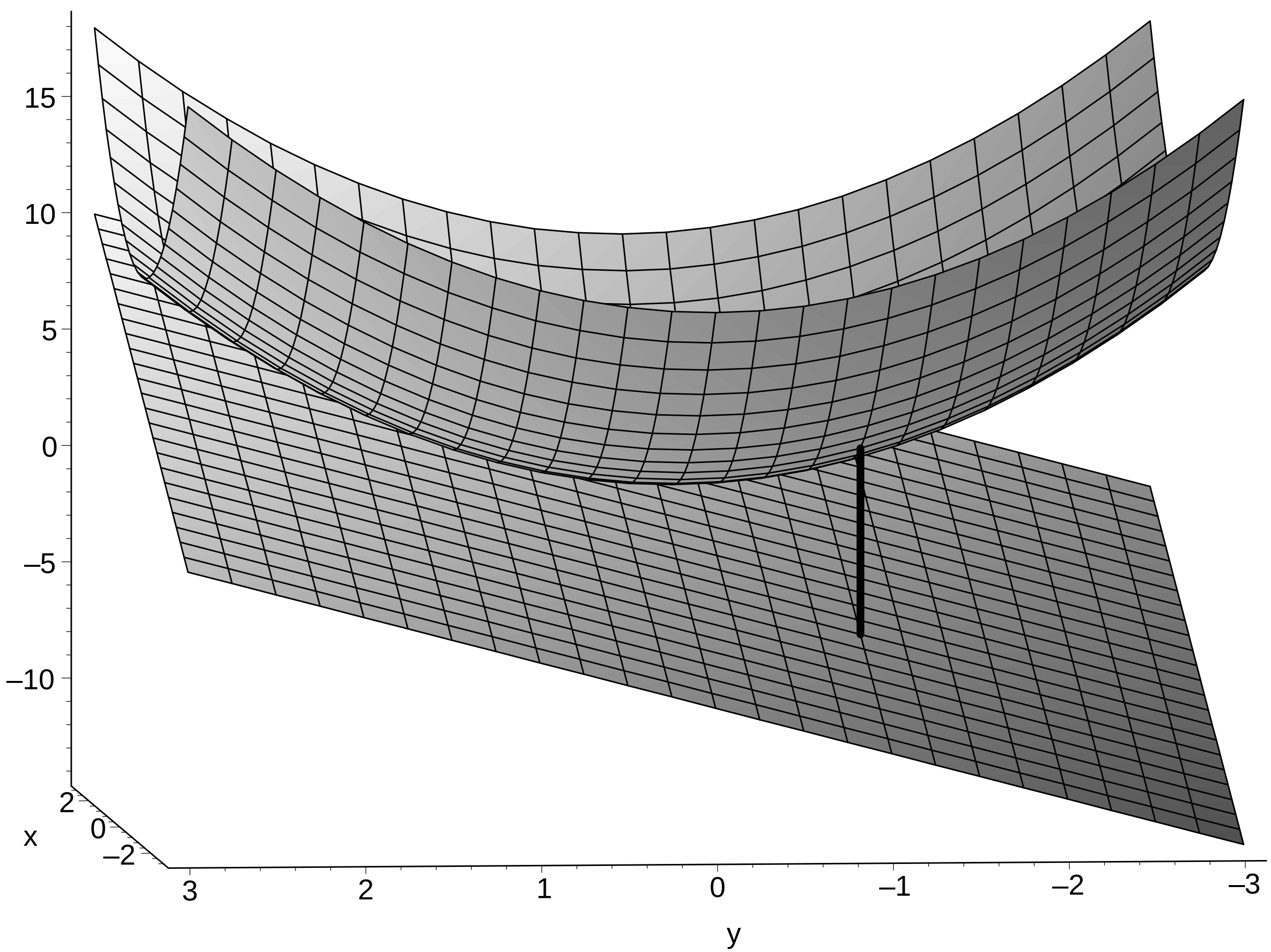
$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Det giver for $x = a + \Delta x$ og $y = b + \Delta y$:

$$\begin{aligned} z &= f(a, b) + f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y \\ &= f(a, b) + df\Big|_{(a,b)}. \end{aligned}$$

Approksimationen til $f(a + \Delta x, b + \Delta y)$ via differentialet er derfor intet andet end tangentplanen gennem $(a, b, f(a, b))$ evalueret i det tilhørende punkt $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

Eksempel



Gradient vektoren

For $f(\mathbf{x})$ med $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ defineres **gradient vektoren** som

$$\nabla f(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Differentialet df kan så skrives kort som

$$df = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h},$$

hvor $\mathbf{h} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$.

Differentiabilitet

Definition. En funktion $f(\mathbf{x})$ siges at være differentiabel i $\mathbf{a}$, hvis der findes en vektor $\mathbf{c}$ således

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{c}\cdot\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

Sammenlign med det simple tilfælde $y = f(x)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0.$$

Dvs. her har vi naturligvis $c = f'(a)$ som forventet!

Differentiabilitet II

Sætning. Antag at $f(\mathbf{x})$ har kontinuerte partielle afledede i en åben omegn af punktet $\mathbf{a}$. Hvis $\mathbf{a}+\mathbf{h}$ ligger i denne omegn, så gælder

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \mathbf{e}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h},$$

hvor $\mathbf{e}(\mathbf{h}) = (e_1(\mathbf{h}), \dots e_n(\mathbf{h}))$ med $e_j(\mathbf{h}) \to \mathbf{0}$ når $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

Hvis $f(\mathbf{x})$ har kontinuerte partielle afledede i en åben omegn af punktet $\mathbf{a}$, så siges f at være *kontinuert differentiabel* i $\mathbf{a}$.

Det følger fra sætningen, at en kontinuert differentiabel funktion i $\mathbf{a}$ er differentiabel i $\mathbf{a}$. Vi vælger nemlig bare $\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{a})$.

Differentiabilitet III

Antag nu at f er differentiabel i $\mathbf{a}$. Dvs. der findes $\mathbf{c}$ således

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{c}\cdot\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

Vælg nu $\mathbf{h} = (0,\ldots,0,h,0,\ldots,0)$ [kun indgang i er forskellig fra 0]. Da følger,

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{c}\cdot\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} &= \lim_{h\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - c_i h}{h} = 0 \\ &= f_{x_i}(\mathbf{a}) - c_i.\end{aligned}$$

Dvs. de partielle afledede eksisterer og $\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{a})$.