Lineære differentialligninger

Lineær 1. ordens differentialligning:

- $$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = g(x), \quad x \in I.$$

Lineær 2. ordens differentialligning:

- $$a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = g(x), \quad x \in I.$$

Lineær n'te ordens differentialligning:

- $$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x), \quad x \in I.$$

Lineære 1. ordens ligninger

Vi betragter ligningen

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad x \in I, \qquad (*).$$

Den fuldstændige løsning til $(*)$ er givet ved

$$y(x) = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x)\, dx + Ce^{-P(x)}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

hvor $P(x) = \int p(x)\, dx$.

Integrationsfaktor:

$$\mu(x) := e^{P(x)} = \exp\left(\int p(x)\, dx \right).$$

Den homogene ligning

Vi betragter igen ligningen

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad x \in I, \qquad (*).$$

Den tilhørende homogene ligning er givet ved:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad x \in I, \qquad (H).$$

Fuldstændig løsning til (H):

$$y_h(x) = Ce^{-P(x)}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Givet en partikulær løsning y_p til $(*)$, så er den fuldstændige løsning til $(*)$:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = y_p(x) + Ce^{-P(x)}.$$