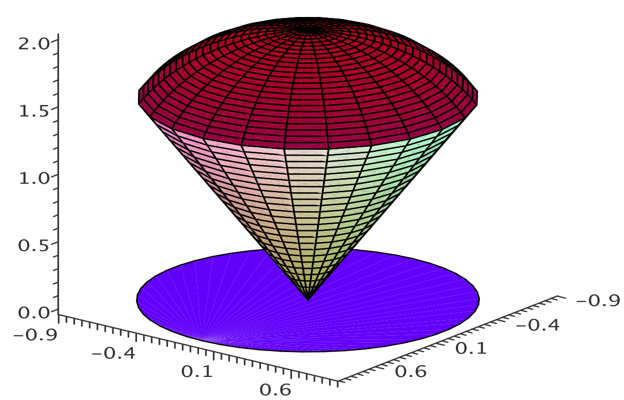
Simple områder

Legmet T kaldes z-simpelt, hvis der findes et område R i xy-planen og to kontinuerte funktioner $z_1(x,y)$ og $z_2(x,y)$ defineret på R, således

$$T = \{(x,y,z) | (x,y) \in R, z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)\}.$$

Så gælder

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dA.$$



z-simpelt T med R vertikal simpelt

Hvis

$$T = \{(x, y, z) | (x, y) \in R, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

hvor

$$R = \{(x, y | a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

så gælder

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

x-simpelt T med R horisontal simpelt

Alternativ situation. Hvis

$$T = \{(x,y,z)|(y,z) \in R, x_1(y,z) \le x \le x_2(y,z)\},$$

hvor

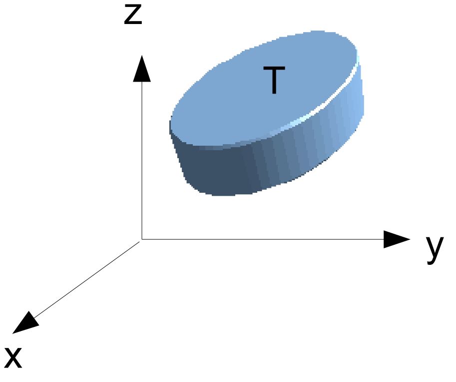
$$R = \{(y,z)|a \le z \le b, y_1(z) \le y \le y_2(z)\},$$

så gælder

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Masse og massemidtpunkt

- Betragt et legme, der netop dækker området T i rummet. Antag, at legemet har massetæthed $\delta(x, y, z)$. Så har legmet masse m og massemidtpunkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ givet ved



$$m = \iiint_T \delta(x, y, z)\, dV$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x\, \delta(x, y, z)\, dV$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_T y\, \delta(x, y)\, dV$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_T z\, \delta(x, y)\, dV$$

Inertimoment

Inertimomentet af legmet T med massetæthed δ.

- Omkring x-akse: $I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\delta(x, y, z)\, dV$
- Omkring y-akse: $I_y = \iiint_T (x^2 + z^2)\delta(x, y, z)\, dV$
- Omkring z-akse: $I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\delta(x, y, z)\, dV$.