Den inhomogene ligning

Vi betragter

$$ay'' + by' + cy = q(x), \qquad (L),$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$ og $q(x)$ er kontinuert på I.

Tilhørende homogene ligningen

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (H).$$

Den fuldstændige løsning til (L): fuldstændig løsning til (H) adderet til en partikulær løsning til (L). Dvs.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Den inhomogene ligning II

Superpositions princippet: Antag at $y_1(x)$ og $y_2(x)$ opfylder

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = q_1(x)$$

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = q_2(x).$$

Så opfylder $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ligningen

$$ay'' + by' + cy = \alpha q_1(x) + \beta q_2(x).$$

Typiske eksempler

$$\gamma y'' + \eta y' + \sigma y = q(x)$$

$q(x)$	Standard gæt $y_p(x)$
a	A
$ax + b$	$Ax + B$
$ax^2 + bx + c$	$Ax^2 + Bx + C$
$a\sin(\beta x) + b\cos(\beta x)$	$A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$
$e^{\alpha x}[a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x)]$	$e^{\alpha x}[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]$
$ae^{\beta x}$	$Ae^{\beta x}$
$(ax + b)e^{\alpha x}$	$(Ax + B)e^{\alpha x}$
$(ax^2 + bx + c)e^{\alpha x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{\alpha x}$

Hvis standard gæt fejler: multiplicer med x!

Standard gæt: generelt

For ligningen

$$ay'' + by' + cy = Cx^m e^{rx}$$

gætter vi på en partikulær løsning på formen

$$y_p(x) = x^s\big(A_m x^m + \cdots + A_1 x + A_0\big)e^{rx},$$

hvor

- $s = 0$ hvis r ikke er en rod i karakterligningen hørende til den homogene ligning.
- $s = 1$ hvis r er en rod af multiplicitet 1 i karakterlign.
- $s = 2$ hvis r er dobbeltrod i karakterlign.

Standard gæt II: generelt

For ligningen

$$ay'' + by' + cy = g(x),$$

med $g(x) = Cx^m e^{\alpha x} \cos \beta x$ eller $g(x) = Cx^m e^{\alpha x} \sin \beta x$, gætter vi på en partikulær løsning på formen

$$\begin{aligned} y_p(x) = x^s \big(A_m x^m &+ \cdots + A_1 x + A_0\big) e^{\alpha x} \cos \beta x \\ &+ x^s \big(B_m x^m + \cdots + B_1 x + B_0\big) e^{\alpha x} \sin \beta x, \end{aligned}$$

hvor

- $s = 0$ hvis $\alpha + i\beta$ ikke er en rod i karakterligningen hørende til den homogene ligning.
- $s = 1$ hvis $\alpha + i\beta$ er en rod i karakterlign.