Differentialligninger

- En differentialligning af orden n er en relation

$$(D) \qquad F(x,y,y',\ldots,y^{(n)}) = 0.$$

- En (eksplicit) løsning til (D) på intervallet I er en n gange differentiabel funktion $\phi(x)$ defineret på I, der opfylder

$$F(x,\phi(x),\phi'(x),\ldots,\phi^{(n)}(x)) = 0, \qquad x \in I.$$

- En implicit løsning til (D) på I er en relation $G(x,y) = 0$, der (via implicit funktionssætningen) definerer én eller flere løsninger til (D) på I.

Begyndelsesværdiproblem

- Et begyndelsesværdiproblem (af orden n) er en differentialligning af orden n

  $$(D) \qquad F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

  på intervallet I sammen med n begyndelsesbetingelser i et givet $x_0 \in I$:

  $$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

  hvor $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ er givne konstanter.
- En løsning til begyndelsesværdiproblemet er en løsning til (D), der opfylder de n betingelser.

Eksistens og entydighed

Sætning. Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$(B) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Antag, at der findes et rektangel

$$R = \{(x,y) | a < x < b, \quad c < y < d\},$$

der indeholder (x_0, y_0) således f og f_y er kontinuerte på R. **Så findes der en entydig bestemt løsning til** (B)**.**

Separable ligninger

En 1. ordens differentialligning på formen

$$(S) \qquad \frac{dy}{dx} = g(x)p(y)$$

kaldes separabel. Løsningsmetode: Lad $h(y) = 1/p(y)$. Multiplicer formelt med $h(y)dx$:

$$\begin{aligned} h(y)\,dy &= g(x)\,dx && \Leftrightarrow \\ \int h(y)\,dy &= \int g(x)\,dx + C && \Leftrightarrow \\ H(y) &= G(x) + C, \end{aligned}$$

hvilket giver en implicit løsning til (S).