Buelængde

Betragt en parametriseret kurve

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \qquad t \in I.$$

Buelængden fra $\mathbf{r}(a)$ til $\mathbf{r}(b)$ er givet ved

$$s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.$$

Buelængdefunktionen er givet ved (vi forudsætter at $0 \in I$):

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2 + z'(\tau)^2}\, d\tau.$$

Buelængde

Vi har,

$$\frac{ds}{dt} = v(t).$$

Hvis $v(t) > 0 \; \forall t$, så er s strengt voksende og vi kan finde dens inverse funktion $t(s)$. Buelængdeparametriseringen af kurven er givet ved

$$s \longrightarrow \mathbf{r}(t(s)).$$

Buelængdefunktion af den buelængdeparametriserede kurve er (iflg. kædereglen)

$$\tilde{s}(\tau) = \int_0^\tau \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \cdot \frac{dt}{ds} \, ds = \int_0^\tau 1 du = \tau.$$

Krumning

Betragt den plane kurve

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \qquad t \in I.$$

Enhedstangentvektoren er givet ved

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j}.$$

Krumningen κ er defineret som

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|.$$

Krumning

Vi har,

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Specialtilfælde:

- Sædvanlig funktion af en variabel:

$$x = t, \quad y = f(t): \qquad \kappa = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

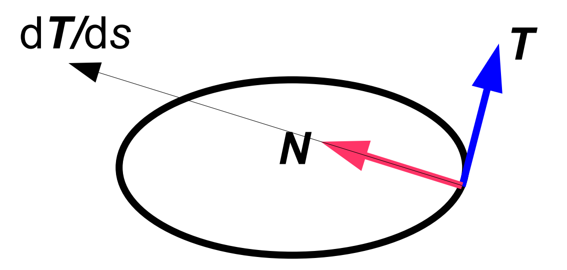
- Cirkel med radius a:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t: \qquad \kappa = \frac{1}{a}.$$

Krumningscirkel

Den principale enhedsvektor $\mathbf{N}(t)$ er en enhedsvektor i $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$'s retning. Vi har,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}.$$



Krumningscirklen gennem et punkt P på kurven, hvor $\kappa \neq 0$, er den cirkel gennem P som er tangent til kurven, og har krumning κ. Centrum og radius for krumningscirklen er derfor:

$$\text{radius} : \rho = \frac{1}{\kappa} \qquad \text{centrum} : \overline{OP} + \rho \mathbf{N}.$$

Krumningscirkel: eksempel

Betragt ellipsen

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} := 3\cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 2\pi).$$

Vi har,

$$\begin{aligned} x'(t) &= -3\sin(t), & x''(t) &= -3\cos(t) \\ y'(t) &= \cos(t), & y''(t) &= -\sin(t), \end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{|x'y'' - x''y'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{|3\sin^2(t) + 3\cos^2(t)|}{[9\sin^2(t) + \cos^2(t)]^{3/2}} \\ &= \frac{3}{[1 + 8\sin^2(t)]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Krumningscirkel: eksempel II

Samtidig har vi

$$\mathbf{v}(t) = -3\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{T}(t) = \frac{-3\sin(t)}{\sqrt{1+8\sin^2(t)}}\mathbf{i} + \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+8\sin^2(t)}}\mathbf{j}.$$

Herfra ser vi, at (”hat vektoren”)

$$\mathbf{N}(t) = \frac{-\cos(t)}{\sqrt{1+8\sin^2(t)}}\mathbf{i} + \frac{-3\sin(t)}{\sqrt{1+8\sin^2(t)}}\mathbf{j}.$$

Krumningscirklen i $\mathbf{r}(t)$ er defor givet ved

$$C : \mathbf{r}(t) + \rho\mathbf{N}(t), \qquad \rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{[1+8\sin^2(t)]^{3/2}}{3}.$$

Krumningscirkel: eksempel III

Sætter vi $t = 0$ får vi:

$$\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i}, \quad \mathbf{N}(0) = -\mathbf{i}, \rho = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{Centrum: } \frac{8}{3}\mathbf{i}, \quad \text{radius: } \frac{1}{3}$$

Sætter vi $t = \frac{5\pi}{6}$ får vi:

$$\mathbf{r}(\tfrac{5\pi}{6}) = -\tfrac{3}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}\mathbf{j}, \quad \mathbf{N}(\tfrac{5\pi}{6}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{i} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}, \rho = \sqrt{3} \Rightarrow \text{Centr.: } -\sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \text{rad: } \sqrt{3}$$