Lineære differentialligninger

Lineær 1. ordens differentialligning:

- $$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = g(x), \quad x \in I.$$

Lineær 2. ordens differentialligning:

- $$a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = g(x), \quad x \in I.$$

Lineær n'te ordens differentialligning:

- $$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x), \quad x \in I.$$

Lineære 1. ordens ligninger

Vi betragter ligningen

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad x \in I, \qquad (*).$$

Den fuldstændige løsning til $(*)$ er givet ved

$$y(x) = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x)\, dx + Ce^{-P(x)}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

hvor $P(x) = \int p(x)\, dx$.

Integrationsfaktor:

$$\mu(x) := e^{P(x)} = \exp\left(\int p(x)\, dx \right).$$

Løsningsstruktur

Betragt en lineær n'te ordens differentialligning:

$$(L) \qquad a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x), \quad x \in I.$$

Den fuldstændige løsning til (L) er givet ved:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

hvor

$y_p(x)$: en partikulær løsning til (L)
$y_h(x)$: den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene ligning:

$$(H) \qquad a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0, \quad x \in I.$$

Bevis for $n = 1$

Definer $L(f) := a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x)$. Det ses let, at

$$\begin{aligned} L(\alpha f + \beta g) &= a_1(x)[\alpha f(x) + \beta g(x)]' + a_0(x)[\alpha f(x) + \beta g(x)] \\ &= \alpha L(f) + \beta L(g). \end{aligned}$$

Specielt, hvis $y = y_h + y_p$:

$$L(y) = L(y_h + y_p) = L(y_h) + L(y_p) = 0 + g(x).$$

Omvendt, for y en *vilkårlig løsning* til (L), danner vi $y - y_p$:

$$L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = g(x) - g(x) = 0,$$

så $y - y_p = y_h$ ($\Rightarrow y = y_h + y_p$) for y_h en løsning til (H).

Den homogene 1. ordens ligning

Vi betragter igen ligningen

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad x \in I, \qquad (*).$$

Den tilhørende homogene ligning er givet ved:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad x \in I, \qquad (H).$$

Fuldstændig løsning til (H):

$$y_h(x) = Ce^{-P(x)}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Vi bemærker, at

$$y_p(x) = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x)\, dx$$

er en partikulær løsning til $(*)$.