Invertible matricer

En $n \times n$ matrix A er **invertibel**, hvis der findes en $n \times n$ matrix C, således

$$CA = I_n \qquad AC = I_n.$$

I givet fald er C entydigt bestemt, og vi skriver $A^{-1} = C$.

Betragter vi den lineære afbildning $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, så er A invertibel netop når afbildningen er både *injektiv* og *surjektiv* (på).

Regneregler:

Lad A og B være invertible $n \times n$ matricer. Så gælder,

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

2×2**-matricer.** En 2×2 matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er invertibel

hvis og kun hvis

$$\det(A) = ad - bc \neq 0.$$

I givet fald har vi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Hovedsætning

Sætning: En $n \times n$-matrix A er invertibel, hvis og kun hvis

$$A \sim I_n.$$

Algoritme: For en $n \times n$-matrix A, der er invertibel, har vi

$$\left[A \mid I_n\right] \sim \left[I_n \mid A^{-1}\right].$$

Elementære matricer

Definition. En elementær $n \times n$ matrix E er en matrix som er fremkommet ved at udføre *netop én* rækkeoperation på I_n.

Eksempler:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elementære matricer II

Faktum: Multiplikation med en elementær matrix E fra venstre på en matrix A svarer præcis til at udføre den rækkeoperation som 'dannede' E direkte på A.

Eksempler:

$$E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 4a+g & 4b+h & 4c+i \end{bmatrix}$$

$$E_3 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$