- En differentialligning af orden n er en relation

$$(D) \qquad F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

- En (eksplicit) løsning til (D) på intervallet I er en n gange differentiabel funktion $\phi(x)$ defineret på I, der opfylder

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0, \qquad x \in I.$$

- En implicit løsning til (D) på I er en relation $G(x, y) = 0$, der (via implicit funktionssætningen) definerer én eller flere løsninger til (D) på I.

Begyndelsesværdiproblem

- Et begyndelsesværdiproblem (af orden n) er en differentialligning af orden n

$$(D) \qquad F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

på intervallet I sammen med n begyndelsesbetingelser i et givet $x_0 \in I$:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

hvor $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ er givne konstanter.

- En løsning til begyndelsesværdiproblemet er en løsning til (D), der opfylder de n betingelser.

Eksistens og entydighed

Sætning

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$(B) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Antag, at der findes et rektangel

$$R = \{(x, y) | a < x < b, \quad c < y < d\},$$

der indeholder (x_0, y_0) således f og f_y er kontinuerte på R. **Så findes der en entydig bestemt løsning til (B).**

Separable ligninger

En 1. ordens differentialligning på formen

$$(S) \qquad \frac{dy}{dx} = g(x)p(y)$$

kaldes separabel. Løsningsmetode: Lad $h(y) = 1/p(y)$. Multiplicer formelt med $h(y)dx$:

$$\begin{aligned} h(y)\,dy &= g(x)\,dx && \Leftrightarrow \\ \int h(y)\,dy &= \int g(x)\,dx + C && \Leftrightarrow \\ H(y) &= G(x) + C, \end{aligned}$$

hvilket giver en implicit løsning til (S).

Lineære differentialligninger

Lineær 1. ordens differentialligning:

- $$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = g(x), \quad x \in I.$$

Lineær 2. ordens differentialligning:

- $$a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = g(x), \quad x \in I.$$

Lineær n'te ordens differentialligning:

- $$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x), \quad x \in I.$$

Lineære 1. ordens ligninger

Løsningsformel: 1. ordens lineære ligninger

Vi betragter ligningen

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad x \in I, \qquad (*).$$

Den fuldstændige løsning til $(*)$ er givet ved

$$y(x) = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x)\, dx + Ce^{-P(x)}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

hvor $P(x) = \int p(x)\, dx$.

Integrationsfaktor

$$\mu(x) := e^{P(x)} = \exp\left(\int p(x)\, dx \right).$$

Den homogene ligning

Vi betragter igen ligningen

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad x \in I, \qquad (*).$$

Den tilhørende **homogene ligning** er givet ved:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad x \in I, \qquad (H).$$

Fuldstændig løsning til (H):

$$y_h(x) = Ce^{-P(x)}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Givet en partikulær løsning y_p til $(*)$, så er den fuldstændige løsning til $(*)$:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = y_p(x) + Ce^{-P(x)}.$$