Den retningsafledede

Givet en differentiabel funktion $f(\mathbf{x})$ af n variable og en *enhedsvektor* $\mathbf{u}$, så defineres den retningsafledede af f i retning $\mathbf{u}$ som:

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h}}$$

Bemærk: $D_{\mathbf{i}} f(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $D_{\mathbf{j}} f(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ osv.

Vi har formlen:

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}}$$

Den retningsafledede II

Hvis θ angiver vinklen mellem $\nabla f(\mathbf{x})$ og $\mathbf{u}$, så har vi:

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = |\nabla f(\mathbf{x})||\mathbf{u}| \cos(\theta) = |\nabla f(\mathbf{x})| \cos(\theta).$$

Det følger, at $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ er størst (f vokser hurtigst) i retningen

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x})|}, \qquad \text{hvor } \cos(0) = 1.$$

Tilsvarende aftager f hurtigst i retningen:

$$\mathbf{u} = -\frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x})|}, \qquad \text{hvor } \cos(\pi) = -1.$$

Differentiabilitet af multivar. funkt.

Givet en funktion $f(\mathbf{x})$, så gælder:

$$f \text{ er differentiabel i punktet } \mathbf{a}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Alle retningsafledede for } f \text{ eksisterer i punktet } \mathbf{a}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Alle partielle afledede for } f \text{ eksisterer i punktet } \mathbf{a}$$

MEN:

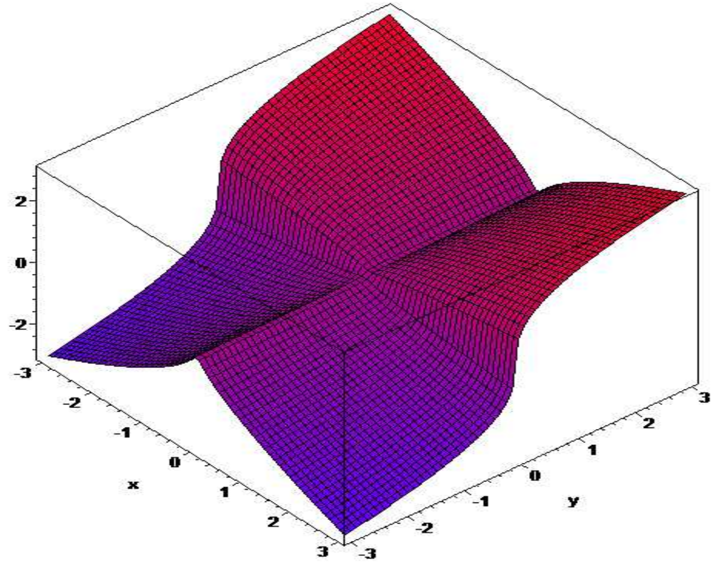
$$\text{Alle partielle afledede for } f \text{ eksisterer i punktet } \mathbf{a}$$
$$\not\Downarrow$$
$$\text{Alle retningsafledede for } f \text{ eksisterer i punktet } \mathbf{a}$$
$$\not\Downarrow$$
$$f \text{ er differentiabel i punktet } \mathbf{a}$$

Ej differentiabel med retningsafl.

Betragt $f(x,y) = (x^2y)^{1/3}$. For $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ ses let, at $D_{\mathbf{u}}f(0,0) = (\cos^2\theta\sin\theta)^{1/3}$. Specielt gælder $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Dvs.

$$\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{u} = 0 \neq D_{\mathbf{u}}f(0,0).$$

Altså er funktionen *ikke* differentiabel i $(0,0)$.



Differentiabilitet af multivar. funkt.

Vi har dog:

Alle partielle afledede for f *eksisterer og er kontinuerte i en (åben) omegn af punktet* $\mathbf{a}$

$$\Downarrow$$

f er differentiabel i punktet $\mathbf{a}$

Implicit definerede flader

Hvis (x_0, y_0, z_0) er en løsning til

$$(*) \qquad F(x, y, z) = 0,$$

hvor F er kontinuert differentiabel med $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, så kan vi betragte løsningsmængden til (*) som en (implicit defineret) flade $\mathcal{F}$.

Tangentplanen til $\mathcal{F}$ i punktet $P_0(x_0, y_0, z_0)$ er givet ved:

$$\boxed{F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0}$$