Matrixprodukt

Definition

Lad A være en $m \times n$-matrix og B være en $n \times p$-matrix givet ved søjlevektorerne $B = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_p]$. Så defineres produktet AB som den $m \times p$-matrix, der er givet ved

$$AB = [A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_p].$$

Pr. definition gælder $(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x})$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$.

Indgang (i,j) i AB

Vi har ligeledes

$$(AB)_{i,j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{b}_j,$$

dvs. prikproduktet mellem rækkevektor $\mathbf{r}_i$ fra A og søjlevektor $\mathbf{b}_j$ fra B.

Invertible matricer

Definition

En $n \times n$ matrix A er **inverterbar** (invertibel), hvis der findes en $n \times n$ matrix C, således

$$CA = I_n \qquad AC = I_n.$$

I givet fald er C entydigt bestemt, og vi skriver $A^{-1} = C$.

Regneregler

Lad A og B være invertible $n \times n$ matricer. Så gælder,

- A^{-1} er invertibel med $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- AB er invertibel med $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- A^T er invertibel med $(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Elementære matricer

Definition

En elementær $n \times n$ matrix E, er en matrix som er fremkommet ved at udføre *netop én* rækkeoperation på I_n.

Eksempler

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elementære matricer II

Faktum:

Multiplikation med en elementær $m \times m$ matrix E fra venstre på en $m \times n$ matrix A, udfører den rækkeoperation som 'dannede' E fra I_m, direkte på A.

Eksempler

$$E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 4a+g & 4b+h & 4c+i \end{bmatrix}$$

$$E_3 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Reduktion til trappeform

Lad A være en $m \times n$ matrix. Vi kan ved et antal (lad os sige p) elementære rækkeoperationer reducere A til dens reducerede trappeform R. Hver af disse rækkeoperationer kan 'udføres' af en elementær $m \times m$-matrix E_j, $j = 1, 2, \ldots, p$. Dvs. vi har

$$A \sim E_1 A \sim E_2(E_1 A) \sim \cdots \sim E_p(E_{p-1} \cdots E_1 A) = R.$$

Vi kan derfor skrive kort, at

$$R = FA,$$

hvor

$$F = E_p E_{p-1} \cdots E_1.$$

Trappeform og elementære matricer II

Faktum II:

Elementære matricer er invertible da rækkeoperationer er 'invertible'. Eksempler:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

Matrix relateret til sin trappeform via invertibel matrix

En $m \times n$-matrix A kan derfor relateres til sin reducerede trappeform R via

$$R = FA,$$

hvor

$$F = E_p E_{p-1} \cdots E_1$$

er en invertibel $m \times m$-matrix (da F er et produkt af invertible elementære matricer).

Invertible matricer

Sætning: Ækvivalente betingelser for invertibilitet

Lad A være en $n \times n$ matrix. Så er følgende udsagn ækvivalente:

a) A er en inverterbar matrix
b) $A \sim I_n$
c) $\mathrm{Rank}(A) = n$
d) A's søjler udspænder $\mathbb{R}^n$
e) Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har mindst en løsning for ethvert $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
f) $\mathrm{Nullity}(A) = 0$
g) A's søjler er lineært uafhængige
h) Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun den trivielle løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
i) Der findes en $n \times n$-matrix B, således $BA = I_n$
j) Der findes en $n \times n$-matrix C, således $AC = I_n$
k) A er et produkt af elementære matricer.