Linære ligningssystemer

Vi betragter det lineære ligningssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \cdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Løsningsmængde: familien af samtlige løsninger. Er løsningsmængden tom, da kaldes systemet *ikke-konsistent.*

Systemets totalmatrix

$$[A \quad \mathbf{b}] = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n | \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Løsningsmetode: Reducer $[A\ \mathbf{b}]$ til reduceret trappeform $[R\ \mathbf{c}]$. Systemet givet ved $[R\ \mathbf{c}]$ har samme løsningsmængde som $[A\ \mathbf{b}]$.

De 3 elementære rækkeoperationer

- Til række nr. j adderes en konstant k gange række nr. i.

$$A = \begin{bmatrix} - - \mathbf{r}_i - - \\ \vdots \\ - - \mathbf{r}_j - - \end{bmatrix} \longrightarrow B = \begin{bmatrix} - - \mathbf{r}_i - - \\ \vdots \\ - - \mathbf{r}_j + k\mathbf{r}_i - - \end{bmatrix}$$

- Række nr. i og j ombyttes.

$$A = \begin{bmatrix} - - \mathbf{r}_i - - \\ \vdots \\ - - \mathbf{r}_j - - \end{bmatrix} \longrightarrow B = \begin{bmatrix} - - \mathbf{r}_j - - \\ \vdots \\ - - \mathbf{r}_i - - \end{bmatrix}$$

- Række i ganges med en konstant $k \neq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} - - \mathbf{r}_i - - \\ \vdots \end{bmatrix} \longrightarrow B = \begin{bmatrix} - - k\mathbf{r}_i - - \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Vigtigt: Løsningsmængden for et tilhørende ligningssystem ændres ikke ved disse rækkeoperationer!

Trappeform

En matrix er på trappeform hvis:

- Eventuelle nulrækker er nederst i matricen
- Første indgang $\neq 0$ (fra venstre) i en række, er til højre for første indgang $\neq 0$ i rækken ovenfor
- Alle indgange nedenfor en første indgang $\neq 0$, er nul.

En matrix er på *reduceret* trappeform hvis:

- Den er på trappeform
- Alle første indgange $\neq 0$ i rækkerne er 1
- En sådan indgang 1, er den eneste indgang $\neq 0$ i den pågældende søjle.

Reduktion til reduceret trappeform

Sætning

En given matrix A kan rækkereduceres til en og kun en matrix R på reduceret trappeform.

Pivot'er

Lad A være en $m \times n$-matrix og lad $A \sim R$, hvor R er på (reduceret) trappeform. En første indgang $\neq 0$ i en række i R kaldes en pivot. De tilhørende søjler (i den oprindelige matrix A) kaldes pivot søjler.

Rang og nullitet

Definition: Rang og nullitet

Lad A være en $m \times n$-matrix. Rangen af A, benævnt $\text{rank}(A)$, er antallet af pivot søjler i A. Nulliteten af A er

$$\text{nullity}(A) := n - \text{rank}(A) = \#\text{ikke-pivot søjler i } A.$$

Bemærkning

Betragt et konsistent ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- $\text{rank}(A)$ er præcis antallet af bundne variable i løsningsmængden.
- $\text{nullity}(A)$ er præcis antallet af frie variable i løsningsmængden.

Konsistens

Ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

er konsistent hvis og kun hvis $\mathbf{b}$ er en linearkombination af A's søjler. Det sker præcis når totalmatricen $[A \ \mathbf{b}]$ **ikke har pivot i sidste søjle**.

Bemærk

En pivot i sidste søjle af totalmatricen svarer til en række $[0 \quad \cdots \quad 0 \,|\, 1]$ i den reducerede trappeform. Men den række svarer jo til den tydeligvis ikke-konsistente ligning $0 = 1$.

Eksempel

Ligningssystemet givet ved totalmatricen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

er ikke-konsistent da der er pivot i sidste (dvs. 6.) søjle.

Eksempel

Beskriv løsningsmængden til ligningssystemet givet ved følgende totalmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Matricen på reduceret trappeform oversættes til ligninger:

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 3x_4 &= 0 & & x_1 = -6x_2 - 3x_4 \\ x_3 - 4x_4 &= 5 & \Rightarrow \quad & x_3 = 5 + 4x_4 \\ x_5 &= 7 & & x_5 = 7. \end{aligned}$$

De naturlige frie variable svarer til ikke-pivot søjler i koefficient-matricen. Dvs. her: x_2 og x_4. Løsningsmængden udtrykt på vektorform:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$