Lineære afbildninger

Lineære transformationer

En **lineær** transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en afbildning (funktion) med definitionsmængde $\mathbb{R}^n$ og kodomæne $\mathbb{R}^m$, der opfylder

- $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$
- $T(r\mathbf{u}) = rT(\mathbf{u}), \qquad r \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$

Eksempel

Betragt en lineær transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, hvor

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \qquad T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Bemærk, at (som tilfældigt valgt eksempel):

$$17\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13\\9\end{bmatrix}$$

Derfor gælder

$$T\left(\begin{bmatrix}13\\9\end{bmatrix}\right) = 17T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) - 4T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = 17\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}17\\-4\end{bmatrix}.$$

Standardmatricen

Identitetsmatricen

Identitetsmatricen $I_n := [a_{ij}]$ er den $n \times n$-matrix, der har indgangene

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}; \quad \text{f.eks.} \quad I_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Søjlevektorerne i I_n benævnes $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Bestemmelse af standardmatricen

Givet en lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da findes der en entydigt bestemt $m \times n$-matrix (standardmatricen) A, der opfylder $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. A er givet ved

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad \cdots \quad T(\mathbf{e}_n)].$$

Standardmatrice: Eksempel I

Transformation givet

Lad $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være give ved

$$T(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_2, -x_1 - 4x_2).$$

Så ses det let, at T er lineær. Det ses desuden direkte, at T's standardmatrix er givet ved

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Standardmatrice: Eksempel II

Lidt mere kompliceret

Betragt en lineær transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, hvor

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\qquad T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Vi bestemmer T's standardmatrix $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. Bemærk, at

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Det giver 4 ligninger med 4 ubekendte:

$$a+b=1,\quad c+d=0,\qquad a+2b=0,\quad c+2d=1.$$

Løsning:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.\ \text{Dvs. } A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$