Symmetriske matricer

Definition

En $n \times n$-matrix A siges at være **symmetrisk** hvis $A^T = A$.

Hovedresultat

- En $n \times n$-matrix A er symmetrisk hvis og kun hvis der findes en orthonormal basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for A. I bekræftende fald har vi diagonaliseringen

$$A = PDP^T, \qquad \text{hvor}$$

  - $P = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_n]$ er ortogonal
  - $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ er diagonal, med $A\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$.

- Den spektrale dekomponering af en symmetrisk matrix A er givet ved

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n,$$

hvor $P_i = \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$ er den ortogonale projektionsmatrix på $\mathrm{span}\{\mathbf{u}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Kvadratiske former

Definition

Givet en symmetrisk $n \times n$-matrix A. Udtrykket

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T A \mathbf{v}, \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

kaldes den kvadratiske form induceret af A.

Naturlige koordinater

Vi kan altid skrive $A = PDP^T$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, da A er symmetrisk. Sæt $\mathbf{y} = P^T \mathbf{v}$. Da følger, at

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T A \mathbf{v} &= \mathbf{v}^T PDP^T \mathbf{v} = (P^T \mathbf{v})^T D (P^T \mathbf{v}) = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots \lambda_n y_n^2. \end{aligned}$$

Eksempel

$$A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} P^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{hvor} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T A \mathbf{v} = 2v_1^2 - 2v_1 v_2 + 2v_2^2;$$

Vi skifter til de naturlige koordinater for T, dvs. sæt $\mathbf{y} = P^T \mathbf{v}$. Det giver: $\mathbf{v}^T A \mathbf{v} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = y_1^2 + 3y_2^2$.