Kapitel 1: perspektiv

- Lineære ligningssystemer
  - Tilhørende totalmatrix
  - Matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
  - Løsnings vha. rækkeoperationer – reduktion til (reduceret) trappeform
  - Analyse af løsningstype: ingen løsning (et ikke konsistent system), netop en løsning og uendeligt mange løsninger.
  - Løsningsmængde skrevet på vektorform

Kapitel 2: perspektiv

- Matrix algebra
  - Sum og produkt af matricer (med kompatible størrelser).
  - Lineære transformationer og deres standardmatrix
  - Invertible kvadratiske matricer og algoritmer for at udregne disse (husk $[A|I_n] \sim [I_n|A^{-1}]$).
  - Underrum af $\mathbb{R}^n$ (søjlerum, nulrum og rang af matricer)

Linære ligningssystemer

Vi betragter det inhomogene ligningssystem

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & + & \vdots & + & \cdots & + & \vdots & = & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Systemets totalmatrix

$$A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n | \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Linære ligningssystemer

Ligningssystemet på matrixform:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

På vektorform:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

Fuldstændig løsning:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p,$$

hvor $\mathbf{x}_h$ er den fuldstændige løsning til den homogene ligning $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og $\mathbf{x}_p$ er en partikulær løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Nyt perspektiv

Vi husker:

$$\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\} = \{c_1\mathbf{a}_2 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n | c_i \in \mathbb{R}\}.$$

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning hvis og kun hvis

$$\mathbf{b} \in \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}.$$

- I fald $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning, så har ligningen netop en løsning når $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun har den trivielle løsning.

Nyt perspektiv II

- A's søjler siges at være **lineært uafhængige** hvis $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun har den trivielle løsning. Dvs. når

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

kun har løsningen $x_1 = \cdots = x_n = 0$. A's søjler er altså lineært uafhængige netop når det homogene ligningssystem

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

ingen fri variable har. Dvs. når $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n]$ har pivot i hver søjle.

Nyt perspektiv III

- Matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning for ethvert $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ netop når A har *pivot i hver række*.
- Hvis $m = n$ (dvs. A er kvadratisk), så har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en entydig løsning netop når A er invertibel. Vi har $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Omvendt, hvis A er kvadratisk og $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning for ethvert $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, så er A invertibel.

Lineære transformationer

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en afbildning, der opfylder

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n.$$

T kan repræsenteres vha. T's standardmatrix, der en en $m \times n$-matrix A givet ved

$$A = [T(\mathbf{e}_1)\, T(\mathbf{e}_2)\, \cdots\, T(\mathbf{e}_n)].$$

Vi har, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
Givet to lineære afbildninger T og S mellem passende rum, så kan den sammensatte funktion $T(S(\mathbf{x}))$ bruges til at definere produktet mellem T og S's standardmatricer.

Lineære transformationer II

En lineær tranformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er invertibel når T er både injektiv og surjektiv (onto). En kvadratisk matrix A er invertibel netop når den lineære operator defineret ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ er invertibel.

- $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ er injektiv [dvs. $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$] netop når A har en pivot i hver søjle.
- $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ er surjektiv [dvs. $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ er konsistent for alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$] netop når A har en pivot i hver række.

Invertible matricer

Lad A være en kvadratisk $n \times n$ matrix. Vi har, blandt mange andre ækvivalente betingelser,

$$A \text{ er invertibel} \Leftrightarrow \begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ har en løsning for alle } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \\ \text{Søjlerne i } A \text{ er lin. uafh.} \\ A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ har kun den triv. løsning} \\ \mathrm{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\} \\ \mathrm{Rank}(A) = n \text{ (dvs. } A \text{ har fuld rang)} \\ \mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^n \\ \det(A) \neq 0. \end{cases}$$

I praksis udregnes A^{-1} altid vha. algoritmen

$$[A|I_n] \sim [I_n|A^{-1}].$$

Bemærkninger

Lad A være en $n \times n$ matrix.

- Hvis den homogene ligning $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun har den trivielle løsning, så udgør A's søjler en basis for $\mathbb{R}^n$.
- Alternativt, hvis $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^n$ (dvs. A's søjler udspænder $\mathbb{R}^n$), så udgør A's søjler en basis for $\mathbb{R}^n$.