# Determinanter for $n \times n$-matricer

## Determinant for $2 \times 2$-matricer

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := ad - bc.$$

Lad $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$ matrix.
Undermatricen $A_{ij}$ er den $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fremkommer ved at slette række nr. $i$ og søjle nr. $j$ fra $A$.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{ij}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kofaktoren $C_{ij}$ er givet ved: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

# Determinanter for $n \times n$-matricer

Med kofaktoren $C_{ij}$ givet ved $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

### Definition af determinant

Vi har

$$\det A := a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}.$$

### Sætning: Udvikling after række nr. $i$

Vi har

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}.$$

### Sætning: Udvikling after søjle nr. $j$

Vi har

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

# Eksempler

## $3 \times 3$-matricer

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \det \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \det \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

## Triangulære $n \times n$-matricer (nedre)

$$\det \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & u_{22} & 0 & 0 \\ * & \cdots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & u_{nn} \end{bmatrix} = u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}.$$

# Determinanter og rækkeoperationer

**Følgende gælder for en $n \times n$ matrix $A$ (med rækkerne $\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_n$)**

- Fremkommer matricen $B$ ved at addere $k$ gange række $i$ fra $A$ til række $j$ ($i \neq j$), da gælder: $\det B = \det A$.

$$A = \begin{bmatrix} - - \mathbf{r}_i - - \\ \vdots \\ - - \mathbf{r}_j - - \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} - - \mathbf{r}_i - - \\ \vdots \\ - - \mathbf{r}_j + k\mathbf{r}_i - - \end{bmatrix}$$

- Fremkommer matricen $B$ ved at ombytte række $i$ og $j$ fra $A$ ($i \neq j$), da gælder: $\det B = -\det A$.

$$A = \begin{bmatrix} - - \mathbf{r}_i - - \\ \vdots \\ - - \mathbf{r}_j - - \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} - - \mathbf{r}_j - - \\ \vdots \\ - - \mathbf{r}_i - - \end{bmatrix}$$

- Fremkommer matricen $B$ ved at gange række $i$ fra $A$ med $k$, da gælder: $\det B = k \det A$.

$$A = \begin{bmatrix} - - \mathbf{r}_i - - \\ \vdots \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} - - k\mathbf{r}_i - - \\ \vdots \end{bmatrix}$$

# Regneregler

**Sætning**

En kvadratisk matrix $A$ er invertibel hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.

**Sætning**

Lad $A$ og $B$ være $n \times n$-matricer. Da gælder

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

**Eksempler:**

For $A$ invertibel har vi:

$$AA^{-1} = I_n \Rightarrow 1 = \det(A)\det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

For en kvadratisk matrix $A$:

$$\det(A^k) = \det(AA^{k-1}) = \det(A)\det(A^{k-1}) = \cdots = \det(A)^k.$$

Kombination af regneregler:

$$\det(A^7(B^T)^{-3}) = \det(A)^7\det((B^T)^{-1})^3 = \det(A)^7\det(B)^{-3}.$$