Lineære afbildninger

Lineære transformationer

En **lineær** transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en afbildning (funktion) med definitionsmængde $\mathbb{R}^n$ og værdimængde i $\mathbb{R}^m$, der opfylder

- $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$
- $T(r\mathbf{u}) = rT(\mathbf{u}), \qquad r \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$

Identitetsmatricen

Identitetsmatricen $I_n := [a_{ij}]$ er den $n \times n$-matrix, der har indgangene

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}; \quad \text{f.eks.} \quad I_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Søjlevektorerne i I_n benævnes $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Matricens navn er en konsekvens af, at $I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Standardmatricen

Bestemmelse af standardmatricen

Givet en lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da findes der en entydigt bestemt $m \times n$-matrix (standardmatricen) A, der opfylder $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. A er givet ved

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad \cdots \quad T(\mathbf{e}_n)].$$

Injektive og surjektive afbildninger

Betragt en afbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Vi siger, at

- T er **surjektiv**, hvis ligningen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ er konsistent for ethvert $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
- T er **injektiv**, hvis $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Egenskaber ved lineære transformationer

Injektive afbildninger

Den lineære transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er injektiv, hvis og kun hvis, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ kun har den trivielle løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Egenskaben injektiv/surjektiv relateret til standardmatricen

Betragt en lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ med standardmatrix A. Da gælder,

- T er **injektiv**, hvis og kun hvis, A's søjler er lineært uafhængige [dvs. præcis når A har pivot i hver søjle].
- T er **surjektiv**, hvis og kun hvis, A's søjler udspænder $\mathbb{R}^m$ [dvs. præcis når A har pivot i hver række].

Bemærkning: T er altså både injektiv og surjektiv (dvs. invertibel) præcis når A har pivot i alle rækker og i alle søjler. Det kan kun ske når $m = n$.