Lineær uafhængighed:

Vektorerne $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ i $\mathbb{R}^n$, siges at være *lineært uafhængige* hvis vektorligningen

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0},$$

kun har den trivielle løsning $c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0$.

Findes der derimod en løsning til

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0},$$

med mindst et $c_j \neq 0$, da siges vektorerne at være *lineært afhængige*.

Vi har følgende:

Sætning. Lad $M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$, $p \geq 2$, være vektorer i $\mathbb{R}^n$.

- Vektorerne i M er *lineært afhængige*, hvis og kun hvis, en af vektorerne i M kan skrives som en linear kombination af de øvrige.
- Hvis $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, og vektorerne i M er *lineært afhængige*, så findes der et $j > 1$ således at

$$\mathbf{v}_j \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}\}.$$

Sætning: Lad $A = [\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n]$ være en $m \times n$-matrix. Så har den homogene ligning $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun den *trivielle løsning* netop når vektorerne $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er *lineært uafhængige*.

Test: Er vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ i $\mathbb{R}^n$ lineært uafhængige?

(1) Opstil $A = [\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_p]$ (en $n \times p$-matrix) og reducer A til trappeform.

(2) Hvis A har mindst en søjle, der ikke er pivot søjle, så er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ lineært **afhængige**.

(3) Hvis alle A's søjler er pivot søjler, da er vektorerne lineært **uafhængige**.

Sætning: Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$, hvor $p > n$. Da er vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ **lineært afhængige**.

Bevis: $A = [\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_p]$ er en $n \times p$ matrix, dvs. A har *flere* søjler (p søjler) end rækker (n rækker). Der kan højst være n pivot'er i A (maks en pr. række), men $n < p$, så mindst én søjle er ikke pivot søjle i A, og sætningen følger jf. testen ovenfor.