Underrum af $\mathbb{R}^n$

Definition 1: Underrum af $\mathbb{R}^n$

Et underrum H af $\mathbb{R}^n$ er en delmængde $H \subseteq \mathbb{R}^n$, der opfylder:

- $\mathbf{0} \in H$
- $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$
- $\mathbf{u} \in H \Rightarrow r\mathbf{u} \in H$ for enhver skalar r.

Eksempler

- Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$. Så er

$$H = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$$

  et underrum af $\mathbb{R}^n$.
- Lad A være en $m \times n$-matrix. Så er

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

  et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Søjle- og nulrummet

Definition 2

Lad $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n]$ være en $m \times n$-matrix.

- **Søjlerummet** for A er det underrum $\mathrm{Col}\, A$ af $\mathbb{R}^m$, der udspændes af A's søjlevektorer. Dvs.

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}.$$

  [Bemærk: søjlerummet er intet andet end billedrummet for afbildningen $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$.]
- **Nulrummet** for A er det underrum af $\mathbb{R}^n$, der er givet ved

$$\mathrm{Nul}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Definition 3: Basis

En **basis** for et underrum H af $\mathbb{R}^n$, er en mængde af *lineært uafhængige* vektorer $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ fra H, der *udspænder* H. Dvs.

$$H = \mathrm{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p\}.$$

Mere om søjle- og nulrummet

Vigtigt eksempel: Basis for Nul(A)

En basis for Nul(A) findes ved at opskrive løsningen til den homogene ligning $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ på vektorform:

$$c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots c_k\mathbf{b}_k,$$

hvor systemet først er reduceret ned til reduceret trappeform. $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ udgør så en basis for Nul(A).

Sætning: Basis for Col(A)

Lad A være en $m \times n$-matrix. Pivot søjlerne i A udgør en basis for Col(A).

Koordinater

Definition 4: Koordinatvektor

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ være en basis for et underrum H af $\mathbb{R}^n$. **Koordinatvektoren** for $\mathbf{x} \in H$ relativt til $\mathcal{B}$ er givet ved

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}, \qquad \text{hvor } \mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_p\mathbf{b}_p.$$

Bemærkning: Koordinatvektoren for $\mathbf{x} \in H$ er den entydige løsning til ligningssystemet

$$\left[\mathbf{b}_1 \, \mathbf{b}_2 \, \cdots \, \mathbf{b}_p \,|\, \mathbf{x}\right].$$

Dimension og rang

Definition 5: Dimension af underrum

Dimensionen af et underrum H af $\mathbb{R}^n$ er antallet af vektorer i en vilkårlig basis for H. Dimensionen af H benævnes $\dim(H)$. Pr. definition er $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.

Definition 6: Rang af en matrix

Rangen af en $m \times n$-matrix A er defineret som

$$\text{rank}(A) := \dim(\text{Col}(A)) = \#\text{pivot søjler i } A.$$

Sætning om matricers rang

Lad A være en $m \times n$-matrix. Da gælder,

$$\text{rank}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) = n.$$

Invertible matricer

Sætning: Ækvivalente betingelser for invertibilitet

Lad A være en $n \times n$ matrix. Så er følgende udsagn ækvivalente:

a) A er en invertibel matrix.
b) $A \sim I_n$.
c) A har n pivot'er.
d) Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun den trivielle løsning.
e) A's søjler er lineært uafhængige.
f) Den lineære transformation $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ er injektiv.
g) Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har mindst en løsning for ethvert $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
h) A's søjler udspænder $\mathbb{R}^n$.
i) Den lineære transformation $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ afbilder $\mathbb{R}^n$ på $\mathbb{R}^n$.
j) Der findes en $n \times n$-matrix C, således $CA = I_n$.
k) Der findes en $n \times n$-matrix D, således $AD = I_n$.
l) A^T er en invertibel matrix.
m) Søjlerne i A udgør en basis for $\mathbb{R}^n$.
n) $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^n$.
o) $\dim(\mathrm{Col}(A)) = n$.
p) $\mathrm{rank}(A) = n$.
q) $\mathrm{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$.
r) $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 0$.