Komplekst polynomium af grad n

Et komplekst polynomium af grad n er en funktion på formen,

$$P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad z \in \mathbb{C},$$

hvor $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$, og $a_n \neq 0$.

Det komplekse tal z_0 er **rod** i $P(z)$ hvis

$$P(z_0) = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = 0.$$

Algebraens fundamentalsætning

Et komplekst polynomium af grad $n \geq 1$ har præcis n komplekse rødder (regnet med multiplicitet).

Faktorisering

Betragt

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad z \in \mathbb{C},$$

med $n \geq 1$.

Der gælder, at

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ er rod i } P(z) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Der findes et polynomium } Q(z) \\ \text{af grad } n-1 \text{ således} \\ P(z) = (z - z_0)Q(z). \end{cases}$$

Specielt, hvis $z_1, z_2, \ldots, z_n$ benævner P's rødder, så har vi følgende faktorisering i lineære faktorer:

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n).$$

Den binome ligning $w^2 = a$

For $\beta \in \mathbb{R}$, definerer vi

$$\operatorname{sgn}(\beta) := \begin{cases} 1, & \beta \geq 0 \\ -1, & \beta < 0. \end{cases}$$

Løsningsformel

Betragt ligningen

$$w^2 = \alpha + i\beta.$$

Sæt $r := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Så er de to løsninger til ligningen givet ved

$$w = \pm\left(\sqrt{\frac{r+\alpha}{2}} + i \cdot \operatorname{sgn}(\beta)\sqrt{\frac{r-\alpha}{2}}\right).$$

Eksempel: Ligningen

$$w^2 = -\gamma^2,$$

hvor $\gamma \in \mathbb{R}$, har løsningerne $w = \pm i\gamma$.

Andengradsligningen

Løsningsformel

Betragt den komplekse andengradsligning

$$(*) \qquad az^2 + bz + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0.$$

Lad w_0 være en løsning til ligningen

$$w^2 = D, \qquad \text{hvor } D := b^2 - 4ac.$$

Så er løsningerne til $(*)$ givet ved

$$z = \frac{-b \pm w_0}{2a}.$$

Eksempel: Betragt $z^2 + z + 1 = 0$. Vi har, $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$. Bemærk, at $w^2 = -3$ har løsningerne $w = \pm i\sqrt{3}$. Derfor får vi,

$$z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Polynomier med reelle koefficienter

Vi betragter nu,

$$(*) \qquad P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad z \in \mathbb{C},$$

hvor $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. Hvis z_0 er rod i P, så følger, at

$$0 = P(z_0) = \overline{P(z_0)} = a_n \overline{z_0}^n + a_{n-1} \overline{z_0}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z_0} + a_0 = P(\overline{z_0}).$$

Dvs. $\overline{z_0}$ er ligeledes rod i P. Rødderne i $(*)$ kan derfor opdeles i to grupper:

- Reelle rødder: $r_1, r_2, \ldots, r_K$
- Komplekst konjugerede par: $\alpha_1 \pm i\beta_1$, $\alpha_2 \pm i\beta_2, \ldots,$ $\alpha_M \pm i\beta_M$.

Det giver en **faktorisering** af P i **reelle 1. og 2. grads polynomier** af typen

$$(z - r_i) \qquad \text{hhv.} \qquad (z^2 - 2\alpha_j z + \alpha_j^2 + \beta_j^2).$$

Rødder i højere ordens polynomier

Som eksempel, lad os finde rødderne i

$$p(z) = z^5 + z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 4z + 4,$$

givet at $z = -1$ er rod. Vi kan derfor skrive $p(z) = (z+1)Q(z)$ for et 4. grads polynomium Q. Vi finder Q vha. algoritmen for polynomiers division:

$$\begin{array}{l}
[\quad z^5 + z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 4z + 4] \div [z+1] = z^4 + 5z^2 + 4 \\
\underline{\;-z^5 - z^4\;} \\
\qquad\qquad\quad 5z^3 + 5z^2 \\
\qquad\qquad \underline{\;-5z^3 - 5z^2\;} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 4z + 4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\;-4z - 4\;} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Rødder i højere ordens polynomier (fortsat)

Altså, $Q(z) = z^4 + 5z^2 + 4$. Bemærk nu, at Q er et skjult 2. grads polynomium. Sæt $w = z^2$, så får vi

$$w^2 + 5w + 4 = 0.$$

Vi har, $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 = 3^2$, så

$$w = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -4 \\ -1. \end{cases}$$

Vi får rødderne i Q via $w = z^2$: $\{\pm i, \pm 2i\}$. Rødderne i $p(z)$ er derfor: $\{-1, \pm i, \pm 2i\}$. Rødderne giver faktoriseringen

$$p(z) = (z+1)(z^2+1)(z^2+4).$$

Maple: kommandoen "$factor(z^5 + z^4 + 5*z^3 + 5*z^2 + 4*z + 4)$" producerer direkte faktoriseringen i reelle polynomier:

$$(z+1)\left(z^2+4\right)\left(z^2+1\right).$$

Løsningsmængde til den binome ligning

Den binome ligning for $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n = a = re^{iv}, \quad a \in \mathbb{C},$$

har n rødder (løsninger) givet ved

$$z = \left(\sqrt[n]{r}\right) \exp\left[i\left(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n}\right)\right], \quad p = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Eksempel: Betragt

$$z^{24} = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Løsningsmængde:

$$z = 2^{1/48} \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4 \cdot 24} + p\frac{2\pi}{24}\right)\right],$$

hvor $p = 0, 1, \ldots, 23$.