Calculus 2011, Prøveeksamen 2.

1. $f(x) = \arcsin(2x)$ | $f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = 2(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}$ | $f'(0) = 2$

$f''(x) = 2 \cdot (-\frac{1}{2})(1-4x^2)^{-\frac{3}{2}}(-8x)$

$= 8x(1-4x^2)^{-\frac{3}{2}}$ | $f''(0) = 0$

$f'''(x) = 8(1-4x^2)^{-\frac{3}{2}} + 8x \cdot (?)$ | $f'''(0) = 8$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$= 0 + 2x + 0 + \frac{8}{3 \cdot 2 \cdot 1}x^3$$

$$= \underline{\underline{2x + \frac{4}{3}x^3}}$$

2. $F(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2z^2 - 26$

2a $\nabla F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$

$$= \underline{\underline{(4x^3 + 4xy^2z^2, 4y^3 + 4x^2yz^2, 4z^3 + 4x^2y^2z)}}$$

2b E&P s. 969 formel (19)

$F(1,-1,2) = 1 + 1 + 16 + 8 - 26 = 0$, OK

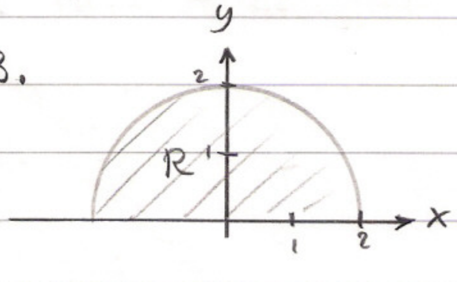
$F_x(1,-1,2) = 4 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 \cdot (-1)^2 \cdot 2^2 = 20$

$F_y(1,-1,2) = 4 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot 1^2 \cdot (-1) \cdot 2^2 = -20$

$F_z(1,-1,2) = 4 \cdot 2^3 + 4 \cdot 1^2 \cdot (-1)^2 \cdot 2 = 40$

$$\underline{\underline{20(x-1) + (-20)(y-(-1)) + 40(z-2) = 0}}$$

3.



$R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

Radial simpelt

$\delta(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = r$

3a $m = \iint_R \delta(x,y)\,dA = \int_0^\pi \left(\int_0^2 r \cdot r\,dr\right)d\theta = \int_0^2 r^2\,dr \cdot \int_0^\pi d\theta$

$$= \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^2 \cdot \pi = \underline{\underline{\frac{8\pi}{3}}}$$

3b $\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_R y\,\delta(x,y)\,dA = \frac{1}{m}\int_0^\pi \int_0^2 r\sin(\theta) \cdot r \cdot r\,dr\,d\theta$

$$= \frac{1}{m}\int_0^2 r^3\,dr \cdot \int_0^\pi \sin(\theta)\,d\theta = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^2 \cdot \left[-\cos(\theta)\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{m}\cdot 4 \cdot (-(-1) - (-1)) = \frac{8}{m} = 8 \cdot \frac{3}{8\pi} = \underline{\underline{\frac{3}{\pi}}}$$

4. $z^4 - (3+i)z^2 + 3i = 0$

4a Det er en 4. grads ligning, så den har $\underline{\underline{4}}$ rødder regnet med multiplicitet.

4b $z^4 - (3+i)z^2 + 3i = 0 \Leftrightarrow (z^2)^2 - (3+i)z^2 + 3i = 0$

Dvs. en 2. grads ligning i z^2. Vi løser først

$w^2 - (3+i)w + 3i = 0$.

(Ved A. Jensens note, bemærkning 4.3, ses det direkte at rødderne er 3 og i).

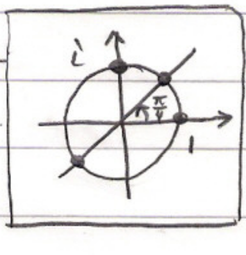
$D = (-(3+i))^2 - 4\cdot 1 \cdot 3i = 9 + i^2 + 6i - 12i = 8 - 6i$.

$v^2 = 8 - 6i$, $\alpha = 8$, $\beta = -6$, $r = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$

$v = \pm\left(\sqrt{\frac{10+8}{2}} + i(-1)\sqrt{\frac{10-8}{2}}\right) = \pm(3-i)$

$w = \frac{-(-(3+i)) \pm (3-i)}{2\cdot 1} = \begin{cases} 3 \\ i \end{cases}$

Vi har dermed



$z^4 - (3+i)z^2 + 3i = 0 \Leftrightarrow z^2 = 3 \vee z^2 = i \Leftrightarrow$

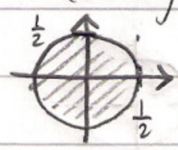
$z = \pm\sqrt{3} \vee z = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

Dvs. rødderne er $\underline{\underline{\pm\sqrt{3},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}}$

5. $f(x,y) = \arccos(4(x^2+y^2))$

5a $-1 \le 4(x^2+y^2) \le 1 \Leftrightarrow 4(x^2+y^2) \le 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 \le \frac{1}{4}$

$\underline{\underline{D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le \frac{1}{4}\}}}$



5b $f_x(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{1-(4(x^2+y^2))^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(4(x^2+y^2)) = \underline{\underline{\frac{-8x}{\sqrt{1-16(x^2+y^2)^2}}}}$

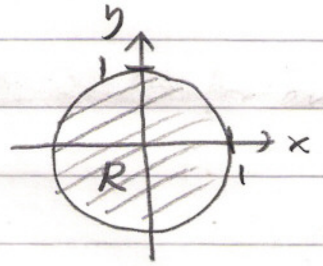
$f_y(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{1-(4(x^2+y^2))^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(4(x^2+y^2)) = \underline{\underline{\frac{-8y}{\sqrt{1-16(x^2+y^2)^2}}}}$

6. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

6a. $f_x(x,y) = 2x$ og $f_y(x,y) = 2y$.

$f_x(x,y) = 0 \wedge f_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge 2y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow$
$(x,y) = (0,0)$.

Randen af R er enhedscirklen.
Dvs. de kritiske punkter for f indenfor randen af R er det ene punkt $\underline{\underline{(0,0)}}$



6b. R består af punkterne på eller indenfor en simpel lukket kurve (enhedscirklen), og f er kontinuert på R.
Vi kan dermed bruge E&P sætning 1 s. 931 og sætning 3 s. 934.
Kritiske punkter i R's indre: (0,0) og $f(0,0) = 0^2 - 0^2 = 0$.
Vi undersøger randen. Parametrisering af denne:
$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
$(f \circ \gamma)(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$
Maks. på randen er 1 og det antages for $t = 0, \pi, 2\pi$ svarende til punkterne $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1,0)$ og $\gamma(\pi) = (-1,0)$
Min. på randen er -1 og det antages for $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ svarende til punkterne $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0,1)$ og $\gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0,-1)$.

(x,y)	$(\pm 1, 0)$	$(0, \pm 1)$	$(0,0)$
$f(x,y)$	1	-1	0

Maks. for f på R er $\underline{\underline{1}}$ og min. er $\underline{\underline{-1}}$.

7. $y'' + 2y' + y = 0$

7a $R^2 + 2R + 1 = 0$, $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$, $R = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$
$((R+1)^2 = R^2 + 2R + 1$ dobbelt rod OK). Fuldst. løsn.
$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2(e^{-x} - xe^{-x})$

$\left.\begin{matrix} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} c_1 = 1 \\ -c_1 + c_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{matrix}\right\}$

$\underline{\underline{y(x) = e^{-x} + xe^{-x}}}$

7b Vi finder en partikulær løsning til $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.

Gæt $y_p(x) = Ae^{2x}$ med $y_p'(x) = 2Ae^{2x}$ og $y_p''(x) = 4Ae^{2x}$.

$y_p'' + 2y_p + y_p = 4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} + Ae^{2x} = 9Ae^{2x}$

$9A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{9}$ Dvs. $y_p(x) = \frac{1}{9}e^{2x}$.

Ved superpositionsprincippet er

$y_2(x) = y_p(x) - y_1(x) = \underline{\underline{\frac{1}{9}e^{2x} - \frac{1}{2} - \frac{3}{50}\cos(2x) + \frac{2}{25}\sin(2x)}}$

en partikulær løsning til $y'' + 2y' + y = e^{2x} - \sin^2(x)$.

8. $\begin{matrix} x(t) = 3\sin(t) \\ y(t) = 5\cos(t) \end{matrix}$, $t \in \mathbb{R}$ (Ellipse)

E&P s. 867 formel (12) giver krumningen:

$$\kappa(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

$x'(t) = 3\cos(t)$, $x''(t) = -3\sin(t)$,

$y'(t) = -5\sin(t)$, $y''(t) = -5\cos(t)$, Indsættes:

$$\kappa(t) = \frac{|-15\cos^2(t) - 15\sin^2(t)|}{(9\cos^2(t) + 25\sin^2 t)^{3/2}} = \frac{|-15(\cos^2(t) + \sin^2(t))|}{(25(\cos^2(t) + \sin^2(t)) - 16\cos^2(t))^{3/2}} = \underline{\underline{\frac{15}{(25 - 16\cos^2(t))^{3/2}}}}$$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (7%)

Betragt rumintegralet

$$I := \iiint_T (x^2y + xz)\,dV,$$

hvor $T = [0,1] \times [-2,3] \times [-1,1]$. Hvilke af nedenstående 4 itererede integraler kan benyttes til at bestemme I (bemærk: værdien af I skal *ikke* udregnes!)

☐ $\int_{-2}^{3}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(x^2y + xz)dx\,dy\,dz.$ forkerte grænser på y og z-integraler

☐ $\int_{0}^{1}\int_{-2}^{3}\int_{-1}^{1}(x^2y + xz)dx\,dz\,dy.$ forkerte grænser på alle integralerne

☒ $\int_{0}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{3}(x^2y + xz)dy\,dz\,dx.$ OK

☐ $\int_{0}^{1}\int_{-2}^{3}\int_{-1}^{1}(xy^2 + xz)dz\,dy\,dx.$ forkert integrant xy^2+xz.

Bemærk at $T = \{(x,y,z) \mid x \in [0,1], y \in [-2,3], z \in [-1,1]\}$

Opgave 10 (6%)

Betragt et komplekst polynomium $p(z)$ af grad 7. Marker samtlige korrekte udsagn nedenfor.

☐ $p(z)$ har altid mindst én reel rod
☐ $p(z)$ har præcis 7 forskellige komplekse rødder
☒ $p(z)$ har præcis 7 komplekse rødder regnet med multiplicitet
☐ $p(z)$ har mindst to forskellige rødder.

$\boxed{p(z) = (z-i)^7 \text{ modeksempel}}$

Algebraens fundamentalsætning.

Opgave 11 (6%)

Betragt en funktion $f(x,y)$ af to variable defineret på $\mathbf{R}^2$. Funktionen har kontinuerte partielle afledede for alle $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Der er givet et punkt $P(a,b)$ i $\mathbf{R}^2$, hvor det oplyses at $f_x(a,b) \neq 0$. Marker samtlige korrekte udsagn nedenfor.

* ☐ f er voksende i $P(a,b)$ i x-aksens retning
☒ Der findes en enhedsvektor $\mathbf{u}$, således f er aftagende i $P(a,b)$ i retningen givet ved $\mathbf{u}$
* ☐ f er voksende i $P(a,b)$ i y-aksens retning.

f er kontinuert differentiabel. Ved E&P sætning 1 s. 964 er

$$D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = |\nabla f(P)|\,|\vec{u}| \cos\theta$$

$$= |\nabla f(P)| \cos\theta,$$ (se også s. 967)

hvor θ er vinklen mellem $\nabla f(P)$ og $\vec{u}$.

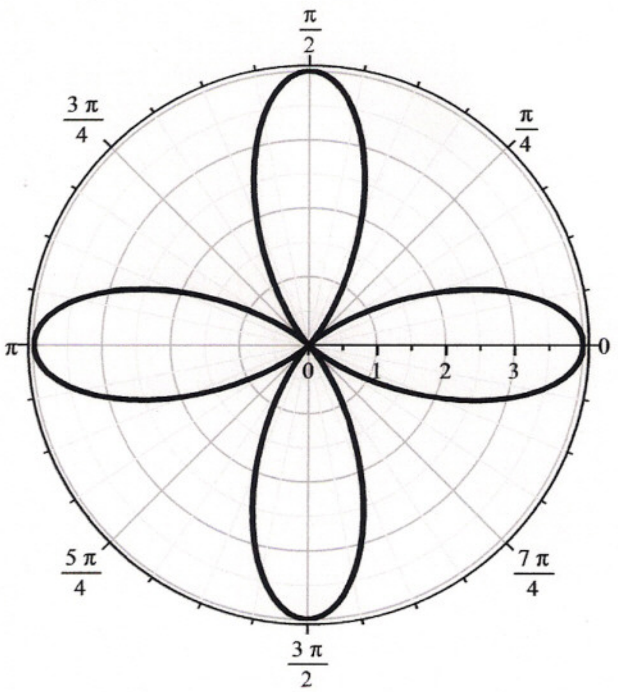
Vi har $\nabla f(P) = (\underbrace{f_x(a,b)}_{\neq 0}, f_y(a,b)) \neq \vec{0}$ så $|\nabla f(P)| > 0$.

* Vi ved ikke om $\cos\theta > 0$ når θ er vinklen mellem $\nabla f(P)$ og $\vec{i}$ eller $\nabla f(P)$ og $\vec{j}$.

• Vælg f. eks. $\vec{u} = -\dfrac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$ hvor $\theta = \pi$ og $\cos(\theta) = -1$.

Opgave 12 (6%)

Figuren nedenfor viser grafen for funktionen $r = f(\theta)$ afbildet i polære koordinater.



Hvilken (hvilke) af nedenstående forskrifter for f, samt tilhørende definitionsmænge for θ, svarer til ovenstående figur.

	$f(0)$		$f(\frac{\pi}{4})$	antal løkker
☐ $f(\theta) = 1 + \cos(4\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$	2	%		
☐ $f(\theta) = 2 + 2\cos(2\theta),\ 0 \le \theta \le \pi$	4	✓	2 %	
☐ $f(\theta) = 2 + 2\sin(4\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$	2	%		
☒ $f(\theta) = 2 + 2\cos(4\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$	4	✓	0 ✓	✓
☐ $f(\theta) = 2 + \cos(4\theta),\ 0 \le \theta \le \pi$	3	%		
☐ $f(\theta) = 2 + 2\cos(4\theta),\ 0 \le \theta \le \pi.$	4	✓	0 ✓	%