22. februar 2005/MN

Operatorer i Hilbertrum

8. lektion

8. lektion, fredag den 25. feb. 2005, kl. 8:15 i G5-109

Repetition: Orthogonale projektioner, Riesz' repræsentationssætning og svag konvergens.

Forelæsning: Vi fortsætter i §5.1-§5.2: Den adjungerede til en begrænset lineær operator. Selv-adjungerede operatorer. Kompakte operatorer.

Opgaver: Denne gang handler det udelukkende om Fourier rækker. Definer $\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$ og $x \in [-\pi, \pi]$. Lad $f \in L^1[-\pi, \pi]$ være en 2π-periodisk funtion. Partialsummen S_n er givet ved

$$S_n(f)(x) = \sum_{|k| \le n} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x), \qquad \langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Definer Dirichlet kernen ved $D_n(x) = \sum_{|k| \le n} e^{ikx}$.

a): Vis, at

$$S_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_n(x-u)\, du := f * D_n(x).$$

Féjer kernen $F_n(x)$ er givet ved

$$F_n(x) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_n(x).$$

b): Vis, at

$$F_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijx}.$$

c): Bemærk først at

$$\sin^2(x/2) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(x)\big) = -\frac{1}{4}e^{-ix} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{ix}.$$

Verificer dernæst, at

$$\left(-\frac{1}{4}e^{-ix} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{ix} \right) \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijx} = \frac{1}{n+1} \left(-\frac{1}{4}e^{-i(n+1)x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{i(n+1)x} \right).$$

Dvs.

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2[(n+1)x/2]}{\sin^2[x/2]}.$$

d): Vis, at (husk, f er 2π-periodisk)

$$\begin{aligned}\sigma_n(f)(x) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)F_n(x-u)\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)F_n(u)\,du \\ &= \frac{S_0(f)+S_1(f)+\cdots S_n(f)}{n+1}.\end{aligned}$$

e): Eftervis, at

$$F_n \geq 0, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,dx = 1, \qquad \forall\delta > 0 : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{x:\delta<|x|\leq\pi} F_n(x)\,dx = 0.$$

f): Modificer beviset på side 18-19 i [P] og bevis $\sigma_n(f)(x) \rightarrow f(x)$ uniformt på $[-\pi,\pi]$ for en kontinuert 2π-periodisk funtion f. Vis også at $\|f-\sigma_n(f)\|_2 \rightarrow 0$ [faktisk: $\|f-\sigma_n(f)\|_p \rightarrow 0$ for $1 \leq p < \infty$]. Specielt har vi vist, at det trigonometriske system udspænder en tæt delmængde af $L^2[-\pi,\pi]$. Det følger, at $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ **udgør en orthonormal basis** for $L^2[-\pi,\pi]$.

g): Fourier transformen på $L^1[-\pi,\pi]$ er injektiv. Vi kan bruge ovenstående til at vise:

$$f, g \in L^1[-\pi,\pi], \qquad \langle f,\varphi_k\rangle = \langle g,\varphi_k\rangle, \quad \forall k\in\mathbb{Z} \quad \Longrightarrow f = g \quad \text{a.e.}$$

[Det bruger Daubechies f.eks. på side 132 formel (5.1.19)].

Med venlig hilsen
Morten