28. februar 2005/MN

Operatorer i Hilbertrum

9. lektion

9. lektion, tirsdag den 1. mar. 2005, kl. 12:30 i G5-109

Repetition: Den adjungerede til $T \in \mathcal{B}(H)$. Selvadjungerede operatorer og deres norm.

Forelæsning: Vi fortsætter med §5.2 om kompakte operatorer. Tillader tiden det vil vi begynde på §5.3 om lukkede operatorer. **Bemærk:** Desværre er beviset for Sætning 5.13 i [P] ikke fuldstændigt, så vi erstatter Lemma 5.12 og Sætning 5.13 med noten på de følgende sider (gennemgås fredag).

Opgaver: [P]: Opgaven fra sidste gang (vigtig!). Dernæst 74, 75, 77, 78.

Med venlig hilsen
Morten

Følgende note erstatter Lemma 5.12 og Sætning 5.13 i [P].

Definition 1. En mængde S i et metrisk rum M kaldes *intetsteds tæt*, hvis det indre af $\overline{S}$ er tomt.

Bemærk: Hvis S er *intetsteds tæt* og A er en åben mængde, så er $A \backslash \overline{S}$ nødvendigvis ikke-tom.

Sætning 1 (Baires kategorisætning)**.** *Et fuldstændigt metrisk rum kan* **ikke** *skrives som en tællelig forening af intetsteds tætte mængder.*

Bevis: Let (M, d) være et fuldstændigt metrisk rum og antag at

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

hvor A_n er intetsteds tæt for $n = 1, 2, \ldots$ Eftersom A_1 er intetsteds tæt, kan vi vælge $x_1 \notin \overline{A_1}$. Da $M \backslash \overline{A_1}$ er åben, kan vi vælge en kugle B_1 omkring x_1 med radius mindre end 1. Da A_2 er intetsteds tæt, kan vi vælge $x_2 \in B_1 \backslash \overline{A_2}$ og en åben kugle B_2 omkring x_2 med radius mindre end $1/2$ som opfylder $\overline{B_2} \subset B_1 \backslash \overline{A_2}$. Vi fortsætter induktivt, og vælger $x_n \in B_{n-1} \backslash \overline{A_n}$ og en åben kugle B_n omkring x_n med radius mindre end 2^{1-n} som opfylder $\overline{B_n} \subset B_{n-1} \backslash \overline{A_n}$. Bemærk at $m, n \geq N$ medfører at $x_n, x_m \in B_N$, så

$$d(x_n, x_m) \leq 2^{1-N} + 2^{1-N} \longrightarrow 0$$

for $N \to \infty$. Derfor er $(x_n) \subset M$ en Cauchy-følge. Lad $x = \lim_n x_n \in M$. Da $x_n \in B_M$ for $n \geq M \geq 2$ har vi $x \in \overline{B_M} \subset B_{M-1}$. Derfor gælder $x \notin A_{M-1}$ for $M = 2, 3, \ldots$, i modstrid med antagelsen $M = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. □

Eksempel: Bemærk, at singleton mængden $\{x\} \subset \mathbb{R}$ er intetsteds tæt. Da $\mathbb{R}$ er fuldstændig kan

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$$

ikke være en tællelig forening, dvs. $\mathbb{R}$ er ikke-tællelig.

I det følgende bruger vi følgende notation for en åben kugle i et Banach-rum X,

$$B_X(x, r) = \{y \in X : \|y - x\| < r\}, \qquad B_r := B_X(0, r).$$

Sætning 2 (Sætningen om åben afbildning)**.** *Betragt en* **surjektiv** *kontinuert lineær afbildning $T \colon X \to Y$ mellem Banach-rum. Hvis $A \subseteq X$ er en åben mængde, da er $T[A]$ åben i Y.*

Bevis: Vi påstår at 0 er et indre punkt for $\overline{T[B_s]}$ for ethvert $s > 0$. Påstanden vises som følger. Lad $s > 0$. Eftersom T er på, gælder

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T[B_{n \cdot s}] = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT[B_s].$$

Iflg. Baires sætning kan vi finde et $\overline{T[B_{n \cdot s}]} = n\overline{T[B_s]}$ med ikke-tomt indre. Dvs. $\overline{T[B_s]}$ har et ikke-tomt indre. Lad y_0 være et indre punkt i $\overline{T[B_s]}$, og vælg en kugle $B_Y(y_0, \varepsilon) \subseteq \overline{T[B_s]}$. For $y \in B_\varepsilon^Y$ gælder

$$y = (y + y_0) - y_0 \in \overline{T[B_s]} + \overline{T[B_s]} \subseteq \overline{T[B_{2s}]}.$$

Dvs. 0 er et indre punkt i $\overline{T[B_{2s}]}$ for alle $s > 0$.

Vi vil nu vise, at $\overline{T[B_1]} \subset T[B_2]$. Vælg $\varepsilon > 0$ så $B^Y_\varepsilon \subseteq \overline{T[B_1]}$. Lad $y \in \overline{T[B_1]}$. Bemærk at mængden $(y - \overline{T[B_{1/2}]})$ har y som indre punkt, da 0 er indre punkt for $\overline{T[B_{1/2}]}$. Derfor er $(y - \overline{T[B_{1/2}]}) \cap T(B_1)$ en ikke-tom mængde [konkret: vælg en følge $(u_n) \subset T[B_1]$ med $u_n \to y$. Så vil u_n efterhånden tilhøre $y + B^Y_{\varepsilon/2}$]. Vælg $x_1 \in B_1$ så $y - Tx_1 \in B^Y_{\varepsilon/2} \subset \overline{T[B_{1/2}]}$. Vælg $x_2 \in B_{1/2}$ så

$$y - Tx_1 - Tx_2 \in B^Y_{\varepsilon/4} \subset \overline{T[B_{1/4}]}.$$

Vha. induktion vælger vi $x_n \in B_{2^{1-n}}$ sådan

$$y - \sum_{j=1}^{n} Tx_j \in B^Y_{\varepsilon 2^{1-n}} \subset \overline{T[B_{2^{-n}}]}.$$

Bemærk at $\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|_X < \sum_{j=1}^\infty 2^{1-j} = 2$ så $x = \sum_{j=1}^\infty x_j \in B_2$ konvergere og

$$y = T\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right) = T(x).$$

Altså gælder $B^Y_\varepsilon \subset \overline{T[B_1]} \subset T[B_2]$ og $T[B_2]$ har et ikke-tomt indre. Ved skalering følger at 0 er et indre punkt for $T[B_s]$ for alle $s > 0$.

Nu kan vi vise sætningen. Lad $A \subseteq X$ være åben. Lad $x \in A$ og vælg $s > 0$ så $B_X(x, s) \subseteq A$. Eftersom 0 er et indre punkt for $T[B_s]$, så er $T(x)$ et indre punkt for $T[B_X(x, s)] \subseteq T[A]$ [linearitet giver $T[B_X(x, s)] = T(x) + T[B_s]$]. Da $x \in A$ var vilkårlig følger at $T[A]$ er åben. $\square$

Sætning 3 (Sætningen om invers afbildning)**.** *Betragt en* **bijektiv** *kontinuert lineær afbildning $T \colon X \to Y$ mellem Banach-rum. Så har T en kontinuert invers T^{-1}.*

Bevis: T er åben, så T^{-1} er kontinuert. $\square$

Følgende opgave viser endnu et eksempel på hvor stærk Baires sætning faktisk er.

Opgave:
a) Lad V og W være normerede rum. Betragt en lineær afbildning $T \colon V \to W$. Vis at T er begrænset netop når mængden $\{x \in V : \|Tx\|_W \le 1\}$ har et ikke-tomt indre.

b) Brug princippet fra a) og Baires sætning til at bevise Sætning 3.7 på side 31 i [P]. Vink: Betragt de lukkede mængder $S_n = \{x \in V : \|T_\lambda x\|_W \le n$ for alle $\lambda \in R\}$. Pr. antagelse gælder $V = \cup_{n \ge 1} S_n$.

c) Brug Sætning 3.7 til at bevise Proposition 4.17 på side 54 i [P].