Matematik 1A, efteråret 2002

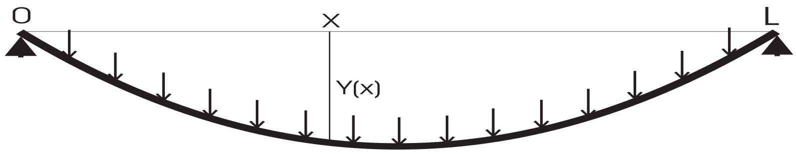
Den Teknisk-Naturvidenskabelige Basisuddannelse

Prøveopgave A – Byggeri og Anlæg

En (simpel) model af en bro er givet ved en simpelt understøttet bjælke af længde L (se figur). Antages det, at bjælken har konstant last per længdeenhed kan man vise at udbøjningen $y(x)$ (se igen figur) opfylder differentialligningen

$$\frac{d^4y}{dx^4} = q_0, \qquad 0 \le x \le L, \qquad (\star),$$

hvor q_0 er en konstant der afhænger af bjælkens *bøjningsstivhed* og bjælkens last per længdeenhed. Målet med denne opgave er at finde et udtryk for $y(x)$ for $0 \le x \le L$.



1. a) Find den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning

   $$\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

   (Vink: lad $w = y''$).

   b) Bestem konstanten β således at $y_p(x) = \beta x^4$ er en partikulær løsning til $\frac{d^4y}{dx^4} = q_0$.

   c) Opskriv den fuldstændige løsning til $(\star)$.

2. Vi betragter nu løsningen til $(\star)$, der opfylder randbetingelserne

   $$y(0) = 0, \quad y(L) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y''(L) = 0.$$

   Disse randbetingelser beskriver at *udbøjningen* og *bøjningsmomenterne* er 0 i understøtningspunkterne $x = 0$ og $x = L$. Bestem konstanten η, således at funktionen

   $$\varphi(x) = \eta x^4 - \frac{Lq_0}{12}x^3 + \frac{L^3q_0}{24}x$$

   er en løsning til $(\star)$, der opfylder de nævnte randbetingelser. Tegn grafen for $\varphi(x)$ når $L = 10$ og $q_0 = 1/100$. Brug evt. Maple.

Teorispørgsmål: Redegør for løsningen af lineære 2. ordens differentialligninger med konstante koefficienter, herunder for superpositionsprincippet.