Repetition og perspektivering

v/ Horia Cornean, kl. 8:15 – 8:45 i G5-112.
Grafiske og numeriske metoder. Introduktion til differentialligningssystemer.

Opgaveregning

kl. 8:45 – 10:40 i grupperummene.

Opgaver:

kap. 2.3, pp. 63 –67: Opg. 5, 13, 21, 29.

kap. 3.1, pp. 99 – 100: Opg. 5, 13.

Vink:

2.3.5 Brug `DFIELD 2002.2` – se lektionsplan no. 3.

2.3.21 En mindre del i hånden og resten på computeren – har I prøvet den slags på basis? Ellers se arbejdarket *Euler Metoden* på hjemmesiden.

2.3.29 Integration: Substituer $y = 3u$. Hvad med arcsin?

Forelæsning:

v/ Horia Cornean, kl. 10:40 – 12:00 i FRB7G5-112.

Mål og indhold:

Et vigtigt værktøj til at analysere et system af to koblede *autonome*[1] differentialligninger (i to variable) er den tilknyttede *faseplan*: På koordinatakserne finder vi de to variable og de to højresider af differentialligninger bruges til at definere et *vektorfelt* i faseplanen. Igen vil det være sådan, at løsningskurvernes[2] tangenter i hvert punkt skal have samme retning som vektorfeltet. Når man har indtegnet en løsningskurve, kan man se dens forløb, men *ikke*, med hvilken (variabel) fart den bliver gennemløbet. Hvis man er i stand til at finde alle (eller rigtig mange typiske) løsningskurver, er der tale om systemets *faseprotræt.*

Vigtige informationer om et system

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

finder man ved at løse ligningerne $f(x,y) = 0$ og $g(x,y) = 0$. Hvis det kan lade sig gøre, er hver løsning som regel beskrevet ved et sæt af kurver ("nul-isokliner"). Langs med de første gælder $x' = 0$, dvs., en integralkurve vil have en vertikal tangent i hver af disse punkter. Tilsvarende gælder $y' = 0$ i alle punkter med

[1]Den uafhængige variable t indgår ikke i ligningerne
[2]andre betegnelser: integralkurve, orbit

Fredrik Bajersvej 7G | 9635 8855 | raussen@math.auc.dk
9220 Aalborg Øst | | http://www.math.auc.dk/~raussen

$g(x,y) = 0$ – horizontale tangenter. Og i snitpunkterne finder vi det såkaldte *stationære punkter*: I et stationært punkt er integralkurven *konstant.*

Hvordan kan man finde frem til et faseportræt? I heldige tilfælde udleder man først én differentialligning fra (1), nemlig

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}. \tag{2}$$

Hvis man kan løse(integrere) denne ligning, finder man en ligning $F(x,y) = C$ – med ubestemt integrationskonstant C – som alle integralkurver $(x(t), y(t))$ skal opfylde. Integralkurverne ligger derfor på niveaukurverne af afbildningen F. I et sådant tilfælde er det klart, at integralkurver gennem forskellige punkter er *éns* (same niveau) eller at de *ikke skærer hinanden.* Gælder det generelt? For at afgøre dette spørgsmål skal vi bruge en hel del værktøj fra *analysen*, og dette bliver et af målene med de kommende forelæsninger.

Hvordan kan man beregne og udtegne faseplan og faseportræt for et givet system – eller få en computer til at gøre det? Som oftest er man nødt til at ty til numeriske beregninger. Eulers metode kan umiddelbart generaliseres til systemer; der bliver bare flere afhængige variable. Man kan opnå bedre nøjatighed ved højere ordens Runge-Kutta metoder – som mange af jer har lært at kende i kurset "Computerstøttet beregning" på basisuddannelsen.

Litteratur:

Bruce P. Conrad, *Differential Equations with Boundary Value Problems*, kap. 3.2 – 3.4, pp. 100 – pp. 117 (fra side 114 blot til en kort orientering).

Software: applet

Afprøv `PPLANE 2002.2` – følg den sti som er beskrevet på lektionsplan no. 3. På vinduet `PPLANE Phase Plane` kan man vælge forskellige repræsentationer. Blandt andet kan man plotte én løsningskurve i et rumligt (t,x,y)-koordinatsystem (klick på `Graph`). Man kan også bede om at få udtegnet "nul-isokliner" og stationære punkter (klick under `Solution`).

Næste gang:

Onsdag, den 17.9., kl. 8:15 – 12:00.
Forelæser: Martin Raussen.
I kurset forlader vi nu differentialligninger for en periode. Kurset kommer i løbet af den næste måned til at dreje sig om grundlæggende begreber (approksimation, konvergens, kontinuitet mv.). Efter efterårsferien vender vi – med nyt værktøj – tilbage til de dynamiske systemer.
Litteratur: Wade, kap. 1.1 – 1.3, pp. 1 – 24. Meget af dette er velkendt stof. Vi koncentrerer os om kap. 1.3.