

# Komplekse perler: Möbiustransformationer, hyperbolske mønstre og fraktaler

Martin Raussen

Institut for matematiske fag  
Aalborg Universitet

AAU

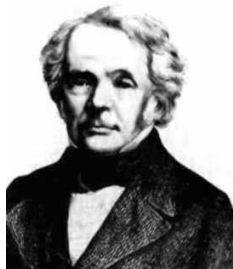
26.3.2010

Matematiske perler

# Möbiustransformationer

## Definition

- **Möbiustransformation:** En afbildning  $f: \overline{\mathbf{C}} \rightarrow \overline{\mathbf{C}}$  på formen  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$ .
- $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ .
- $f(-d/c) = \infty, f(\infty) = a/c$ .



August Ferdinand  
Möbius  
1790 – 1868

# Eksempler på Möbiustransformationer

også på Riemann-sfæren

**Translation**  $z \mapsto z + b$

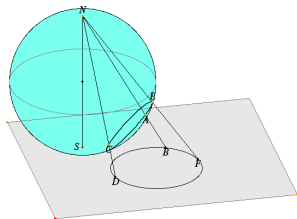
**Rotation**  $z \mapsto (\cos\theta + i \sin\theta) \cdot z$

**Zoom(ind/ud)**  $z \mapsto az, a \in \mathbf{R}, a > 0$

**Spejlinversion**  $z \mapsto 1/z$

Gennem stereografisk projektion kan man projicere enhedssfæren  $S^2$  på  $\bar{\mathbf{C}}$  – og omvendt.

Hvilke transformationer får man så på sfæren? Se bare!



# Möbiustransformationers algebra

$2 \times 2$ -matricer

- $GL(2, \mathbf{C})$ : gruppen af alle invertible  $2 \times 2$ -matricer  
 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  med komplekse koefficienter  
invertibel:  $\det(A) = ad - bc \neq 0$ .
- Matricen  $A$  svarer til Möbiustransformationen  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ .
- Matrix**multiplikation** svarer til **sammensætning** af transformationer.
- Möbiustransformationen givet ved matricen  $A$  har en **invers** Möbiustransformation givet ved  $A^{-1}$ .
- Matricerne  $A$  og  $rA$ ,  $r \neq 0$ , beskriver den samme Möbiustransformation.
- Derfor er **gruppen** af Möbiustransformationer isomorf til den projektive gruppe  $PGL(2, \mathbf{C}) = GL(2, \mathbf{C})/\mathbf{C}^*$  – en  $8 - 2 = 6$  – dimensional **Liegruppe**: 6 reelle frihedsgrader.

# Möbiustransformationers algebra

$2 \times 2$ -matricer

- $GL(2, \mathbf{C})$ : gruppen af alle invertible  $2 \times 2$ -matricer  
 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  med komplekse koefficienter  
invertibel:  $\det(A) = ad - bc \neq 0$ .
- Matricen  $A$  svarer til Möbiustransformationen  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ .
- Matrix**multiplikation** svarer til **sammensætning** af transformationer.
- Möbiustransformationen givet ved matricen  $A$  har en **invers** Möbiustransformation givet ved  $A^{-1}$ .
- Matricerne  $A$  og  $rA$ ,  $r \neq 0$ , beskriver den samme Möbiustransformation.
- Derfor er **gruppen** af Möbiustransformationer isomorf til den projektive gruppe  $PGL(2, \mathbf{C}) = GL(2, \mathbf{C})/\mathbf{C}^*$  – en  $8 - 2 = 6$  – dimensional **Liegruppe**: 6 reelle frihedsgrader.

# Möbiustransformationers geometri 1

## Theorem

- 1 Enhver Möbiustransformation er sammensætning af translationer, rotationer, zoom (dilationer) og spejlinversioner.
- 2 En Möbiustransformation er **konform** (vinkelbevarende).
- 3 En Möbiustransformation overfører **cirkler i cirkler** (rette linier = cirkler gennem  $\infty$ ).
- 4 Givet to gange tre forskellige punkter  $P_1, P_2, P_3$  og  $Q_1, Q_2, Q_3$  i  $\bar{\mathbb{C}}$ . Så findes der **netop en MT**  $f$  således at  $f(P_j) = Q_j$ .

## Bevis.

(1)

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{(bc-ad)/c^2}{z+d/c}$$

(4) Først  $f_P$  fra

$(P_1, P_2, P_3)$  til  $(0, 1, \infty)$ :

$$f_P(z) = \frac{(z-P_1)(P_2-P_3)}{(z-P_3)(P_2-P_1)}$$

og så  $f_Q$  fra  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  til  $(0, 1, \infty)$ .

$$f := (f_Q)^{-1} \circ f_P.$$

Entydighed: En MT fra  $(0, 1, \infty)$  til  $(0, 1, \infty)$ .

Tre komplekse frihedsgrader!



# Möbiustransformationers geometri 1

## Theorem

- 1 *Enhver Möbiustransformation er sammensætning af translationer, rotationer, zoom (dilationer) og spejlinversioner.*
- 2 *En Möbiustransformation er **konform** (vinkelbevarende).*
- 3 *En Möbiustransformation overfører **cirkler i cirkler** (rette linier = cirkler gennem  $\infty$ ).*
- 4 *Givet to gange tre forskellige punkter  $P_1, P_2, P_3$  og  $Q_1, Q_2, Q_3$  i  $\bar{\mathbb{C}}$ . Så findes der **netop en MT**  $f$  således at  $f(P_j) = Q_j$ .*

## Bevis.

(1)

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{(bc-ad)/c^2}{z+d/c}.$$

(4) Først  $f_P$  fra

$(P_1, P_2, P_3)$  til  $(0, 1, \infty)$ :

$$f_P(z) = \frac{(z-P_1)(P_2-P_3)}{(z-P_3)(P_2-P_1)}$$

og så  $f_Q$  fra  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  til  $(0, 1, \infty)$ .

$$f := (f_Q)^{-1} \circ f_P.$$

Entydighed: En MT fra  $(0, 1, \infty)$  til  $(0, 1, \infty)$ .

Tre komplekse frihedsgrader!



## Möbiustransformationers geometri 2

**Fixpunkter** En Möbiustransformation har enten **to** fixpunkter eller bare **et**.

**Konjugation** Hvis der er to fixpunkter, så er transformationen konjugeret til en af typen  $z \mapsto az$ .  $z \mapsto \frac{1}{z}$ ?  
Når der kun er et, så er transformationen konjugeret til en af typen  $z \mapsto z + b$ .

Geometrisk og algebraisk **klassifikation** ved hjælp af **sporet**  $Tr(A)$  af en tilsvarende matrix  $A$  med  $det(A) = 1$ :

**parabolsk** (et fikspunkt): konjugeret til

$$z \mapsto z + b \Leftrightarrow Tr(A) = \pm 2$$

**elliptisk** (invariante cirkler): konjugeret til

$$z \mapsto az, |a| = 1 \Leftrightarrow Tr(A) \in ]-2, 2[$$

**loksodromisk** konjugeret til

$$z \mapsto az, |a| \neq 1 \Leftrightarrow Tr(A) \notin [-2, 2]$$



## Möbiustransformationers geometri 2

**Fixpunkter** En Möbiustransformation har enten to fixpunkter eller bare **et**.

**Konjugation** Hvis der er to fixpunkter, så er transformationen konjugeret til en af typen  $z \mapsto az$ .  $z \mapsto \frac{1}{z}$ ?  
Når der kun er et, så er transformationen konjugeret til en af typen  $z \mapsto z + b$ .

Geometrisk og algebraisk **klassifikation** ved hjælp af **sporet**  $\text{Tr}(A)$  af en tilsvarende matrix  $A$  med  $\det(A) = 1$ :

**parabolsk** (et fikspunkt): konjugeret til

$$z \mapsto z + b \Leftrightarrow \text{Tr}(A) = \pm 2$$

**elliptisk** (invariante cirkler): konjugeret til

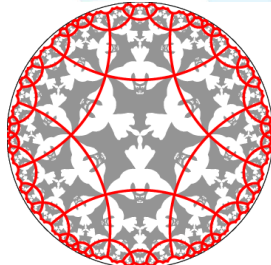
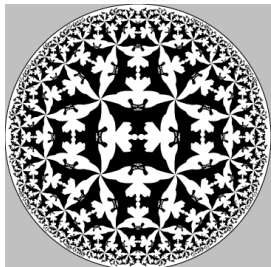
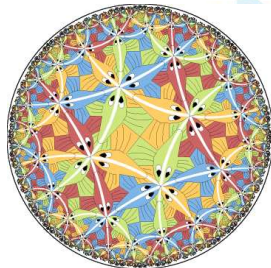
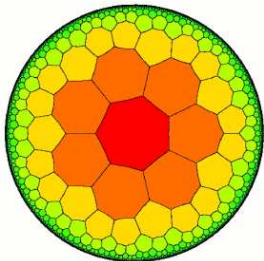
$$z \mapsto az, |a| = 1 \Leftrightarrow \text{Tr}(A) \in ]-2, 2[$$

**loksodromisk** konjugeret til

$$z \mapsto az, |a| \neq 1 \Leftrightarrow \text{Tr}(A) \notin [-2, 2]$$

# Eksempler

M.C. Escher (1898 – 1972)



# Baggrund: Hyperbolsk geometri

Modeller: Eugenio Beltrami, Felix Klein, Henri Poincaré

Klassisk baggrund for geometri: **Euklid**, baseret på 5 postulater.  
Kampen om parallelpostulatet: Er det uafhængigt af/kan det bevises fra de 4 andre?

**Gauss, Bolyai, Lobachevski**, 1820 – 1830: Alternative geometrier med vinkelsum i trekant forskellig fra  $180^\circ$ .

**Hyperbolsk geometri**: Vinkelsum i trekanter mindre end  $180^\circ$ , vilkårlig lille – homogent, (Gauss-)krumning  $< 0$ .

**Absolut længde**: Hvis to trekanter er similære, så er de også kongruente!

**Beltrami**, ca. 1870: Modeller “indlejret” i Euklidisk geometri, men med ændrede betydninger for “linier”, “længde”, “afstand”, “vinkler” (i nogle modeller).

# Baggrund: Hyperbolsk geometri

Modeller: Eugenio Beltrami, Felix Klein, Henri Poincaré

Klassisk baggrund for geometri: **Euklid**, baseret på 5 postulater.  
Kampen om parallelpostulatet: Er det uafhængigt af/kan det bevises fra de 4 andre?

**Gauss, Bolyai, Lobachevski**, 1820 – 1830: Alternative geometrier med vinkelsum i trekant forskellig fra  $180^0$ .

**Hyperbolsk geometri**: Vinkelsum i trekanter mindre end  $180^0$ , vilkårlig lille – homogent, (Gauss-)krumning  $< 0$ .

**Absolut længde**: Hvis to trekanter er similære, så er de også kongruente!

**Beltrami**, ca. 1870: Modeller “indlejret” i Euklidisk geometri, men med ændrede betydninger for “linier”, “længde”, “afstand”, “vinkler” (i nogle modeller).

# Baggrund: Hyperbolsk geometri

Modeller: Eugenio Beltrami, Felix Klein, Henri Poincaré

Klassisk baggrund for geometri: **Euklid**, baseret på 5 postulater.  
Kampen om parallelpostulatet: Er det uafhængigt af/kan det bevises fra de 4 andre?

**Gauss, Bolyai, Lobachevski**, 1820 – 1830: Alternative geometrier med vinkelsum i trekant forskellig fra  $180^0$ .

**Hyperbolsk geometri**: Vinkelsum i trekanter mindre end  $180^0$ , vilkårlig lille – homogent, (Gauss-)krumning  $< 0$ .

**Absolut længde**: Hvis to trekanter er similære, så er de også kongruente!

**Beltrami**, ca. 1870: Modeller “indlejret” i Euklidisk geometri, men med ændrede betydninger for “linier”, “længde”, “afstand”, “vinkler” (i nogle modeller).

# Modeller for hyperbolsk geometri

Geodætiske kurver, længde, vinkler

**Poincarés øvre halvplan:**

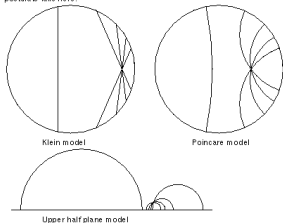
$H = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im z > 0\}$ . Geodætiske kurver (linier): halvlinier og halvcirkler vinkelret på den reelle akse. Vinkler som i Euklidisk geometri. Længde med linieelement  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$  – den reelle akse er uendelig fjern fra alle punkter.

**Poincarés cirkelskive:**

$D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ .

Geodætiske kurver: Cirkelbuer vinkelret på randen. Vinkler som i Euklidisk geometri. Længde med linieelement  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 - x^2 - y^2}$  – randcirklen er uendelig fjern fra alle punkter.

Figure 1: The same lines in three different models. Note that the parallel postulate fails here.



**Kleins cirkelmodel K:**

Samme cirkelskive.

Geodætiske kurver =

sekanter.

Vinkler ikke som i EG.

# Modeller for hyperbolsk geometri

Geodætiske kurver, længde, vinkler

**Poincarés øvre halvplan:**

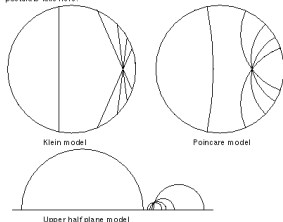
$H = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im z > 0\}$ . Geodætiske kurver (linier): halvlinier og halvcirkler vinkelret på den reelle akse. Vinkler som i Euklidisk geometri. Længde med linieelement  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$  – den reelle akse er uendelig fjern fra alle punkter.

**Poincarés cirkelskive:**

$D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ .

Geodætiske kurver: Cirkelbuer vinkelret på randen. Vinkler som i Euklidisk geometri. Længde med linieelement  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 - x^2 - y^2}$  – randcirklen er uendelig fjern fra alle punkter.

Figure 1: The same lines in three different models. Note that the parallel postulate fails here.



**Kleins cirkelmodel K:**  
Samme cirkelskive.

Geodætiske kurver =  
sekanter.

Vinkler ikke som i EG.

# Modeller for hyperbolsk geometri

Geodætiske kurver, længde, vinkler

**Poincarés øvre halvplan:**

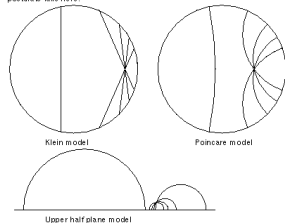
$H = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im z > 0\}$ . Geodætiske kurver (linier): halvlínier og halvcirkler vinkelret på den reelle akse. Vinkler som i Euklidisk geometri. Længde med linieelement  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$  – den reelle akse er uendelig fjern fra alle punkter.

**Poincarés cirkelskive:**

$D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ .

Geodætiske kurver: Cirkelbuer vinkelret på randen. Vinkler som i Euklidisk geometri. Længde med linieelement  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 - x^2 - y^2}$  – randcirklen er uendelig fjern fra alle punkter.

Figure 1: The same lines in three different models. Note that the parallel postulate fails here.



**Kleins cirkelmodel K:**

Samme cirkelskive.

Geodætiske kurver =

sekanter.

Vinkler ikke som i EG.



# Isometrier i modeller for hyperbolsk geometri som Möbiustransformationer!

**Isometri:** afstands- og vinkelbevarende transformation.

**Poincarés øvre halvplan  $H$ :**

Möbiustransformationer i  **$SL(2, \mathbf{R})$** :

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Horizontale translationer  $z \mapsto z + b, b \in \mathbf{R}$ ;

Dilationer  $z \mapsto rz, r > 0$ ;

Spejlinversioner  $z \mapsto -\frac{1}{z}$ .

**Poincarés cirkelskive  $D$ :**

Möbiustransformationer

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z+z_0}{z_0z+1}, \quad \theta \in \mathbf{R}, \quad |z_0| < 1.$$

**De to modeller er ækvivalente:**

Brug f.eks.  $T : H \rightarrow D, T(z) = \frac{iz+1}{z+i}$

og dens inverse  $T^{-1}$ !



Henri Poincaré  
1854 – 1912

# Isometrier i modeller for hyperbolsk geometri som Möbiustransformationer!

**Isometri:** afstands- og vinkelbevarende transformation.

**Poincarés øvre halvplan  $H$ :**

Möbiustransformationer i  $SL(2, \mathbf{R})$ :

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Horizontale translationer  $z \mapsto z + b, b \in \mathbf{R}$ ;

Dilationer  $z \mapsto rz, r > 0$ ;

Spejlinversioner  $z \mapsto -\frac{1}{z}$ .

**Poincarés cirkelskive  $D$ :**

Möbiustransformationer

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z+z_0}{\bar{z}_0 z + 1}, \quad \theta \in \mathbf{R}, \quad |z_0| < 1.$$

De to modeller er ækvivalente:

Brug f.eks.  $T : H \rightarrow D, T(z) = \frac{iz+1}{z+i}$

og dens inverse  $T^{-1}$ !



Henri Poincaré  
1854 – 1912

# Isometrier i modeller for hyperbolsk geometri som Möbiustransformationer!

**Isometri:** afstands- og vinkelbevarende transformation.

**Poincarés øvre halvplan  $H$ :**

Möbiustransformationer i  $SL(2, \mathbf{R})$ :

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Horizontale translationer  $z \mapsto z + b, b \in \mathbf{R}$ ;

Dilationer  $z \mapsto rz, r > 0$ ;

Spejlinversioner  $z \mapsto -\frac{1}{z}$ .

**Poincarés cirkelskive  $D$ :**

Möbiustransformationer

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z+z_0}{\bar{z}_0 z + 1}, \quad \theta \in \mathbf{R}, \quad |z_0| < 1.$$

**De to modeller er ækvivalente:**

Brug f.eks.  $T : H \rightarrow D, T(z) = \frac{iz+1}{z+i}$

og dens inverse  $T^{-1}$ !



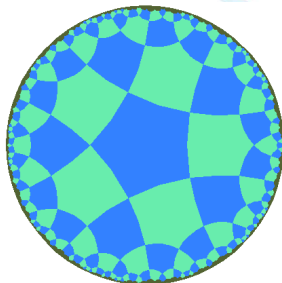
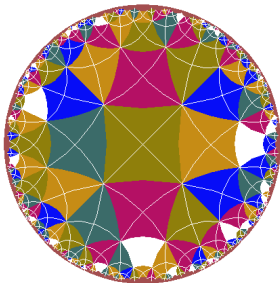
Henri Poincaré  
1854 – 1912

# Hyperbolsk brolægning

Regulær brolægning i **Euklidisk** geometri – Schläflisymboler:  
**Kun**  $(n, k) = (3, 6), (4, 4), (6, 3)$  –  $k$  regulære  $n$ -kanter – muligt.

$$\text{Vinkelsum} = 180^\circ \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2}.$$

i **hyperbolsk** geometri:  $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$ : Mange flere muligheder!



Mønstertransformationerne danner en **diskret undergruppe** i gruppen af Möbiustransformationer.

Do it yourself!

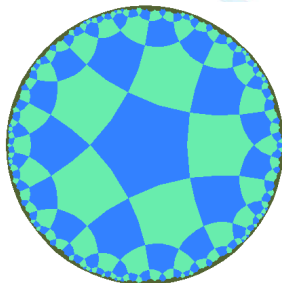
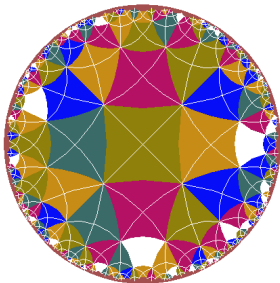


# Hyperbolsk brolægning

Regulær brolægning i **Euklidisk** geometri – Schläflisymboler:  
**Kun**  $(n, k) = (3, 6), (4, 4), (6, 3)$  –  $k$  regulære  $n$ -kanter – muligt.

$$\text{Vinkelsum} = 180^0 \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2}.$$

i **hyperbolsk** geometri:  $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$ : Mange flere muligheder!



Mønstertransformationerne danner en **diskret undergruppe** i gruppen af Möbiustransformationer.

Do it yourself!

2



# Schottkygrupper

## Undergrupper af Möbiustransformationer

Givet to disjunkte cirkler  $C_1, D_1$  i  $\mathbf{C}$ .

Der findes en Möbiustransformation  $A$ , som afbilder  $C_1$ s ydre i  $C_2$ s indre og  $C_1$ s indre i  $C_2$ s ydre. Hvad gør  $a = A^{-1}$ ?

Tilsvarende: to disjunkte cirkler  $C_2, D_2$  i  $\mathbf{C}$ , også disjunkt med  $C_1, D_1$ . Möbiustransformationer  $B, b$ .

Undergruppen  $\langle A, B \rangle$  frembragt af  $A, B$  består af alle "ord" i alfabetet  $A, a, B, b$  (eneste relationer:  $Aa = aA = e = Bb = bB$ ).

For eksempel:

$A, a, B, b, A^2, AB, Ab, a^2, aB, ab, BA, Ba, B^2, bA, ba, b^2, A^3, A^2B, ABa, \dots$

Hvordan virker transformationerne i denne (Schottky)-undergruppe på  $\bar{\mathbf{C}}$ ?



Friedrich  
Schottky  
1851 –  
1935

# Schottkygrupper

## Undergrupper af Möbiustransformationer

Givet to disjunkte cirkler  $C_1, D_1$  i  $\mathbf{C}$ .

Der findes en Möbiustransformation  $A$ , som afbilder  $C_1$ s ydre i  $C_2$ s indre og  $C_1$ s indre i  $C_2$ s ydre. Hvad gør  $a = A^{-1}$ ?

Tilsvarende: to disjunkte cirkler  $C_2, D_2$  i  $\mathbf{C}$ , også disjunkt med  $C_1, D_1$ . Möbiustransformationer  $B, b$ .

Undergruppen  $\langle A, B \rangle$  frembragt af  $A, B$  består af alle "ord" i alfabetet  $A, a, B, b$  (eneste relationer:  $Aa = aA = e = Bb = bB$ ).

For eksempel:

$A, a, B, b, A^2, AB, Ab, a^2, aB, ab, BA, Ba, B^2, bA, ba, b^2, A^3, A^2B, ABA, \dots$

Hvordan virker transformationerne i denne (Schottky)-undergruppe på  $\bar{\mathbf{C}}$ ?



Friedrich  
Schottky  
1851 –  
1935

# Schottkygrupper

## Undergrupper af Möbiustransformationer

Givet to disjunkte cirkler  $C_1, D_1$  i  $\mathbf{C}$ .

Der findes en Möbiustransformation  $A$ , som afbilder  $C_1$ s ydre i  $C_2$ s indre og  $C_1$ s indre i  $C_2$ s ydre. Hvad gør  $a = A^{-1}$ ?

Tilsvarende: to disjunkte cirkler  $C_2, D_2$  i  $\mathbf{C}$ , også disjunkt med  $C_1, D_1$ . Möbiustransformationer  $B, b$ .

Undergruppen  $\langle A, B \rangle$  frembragt af  $A, B$  består af alle "ord" i alfabetet  $A, a, B, b$  (eneste relationer:  $Aa = aA = e = Bb = bB$ ).

For eksempel:

$A, a, B, b, A^2, AB, Ab, a^2, aB, ab, BA, Ba, B^2, bA, ba, b^2, A^3, A^2B, ABA, \dots$

Hvordan virker transformationerne i denne (Schottky)-undergruppe på  $\bar{\mathbf{C}}$ ?



Friedrich  
Schottky  
1851 –  
1935



# Schottkygrupper

## Undergrupper af Möbiustransformationer

Givet to disjunkte cirkler  $C_1, D_1$  i  $\mathbf{C}$ .

Der findes en Möbiustransformation  $A$ , som afbilder  $C_1$ s ydre i  $C_2$ s indre og  $C_1$ s indre i  $C_2$ s ydre. Hvad gør  $a = A^{-1}$ ?

Tilsvarende: to disjunkte cirkler  $C_2, D_2$  i  $\mathbf{C}$ , også disjunkt med  $C_1, D_1$ . Möbiustransformationer  $B, b$ .

Undergruppen  $\langle A, B \rangle$  frembragt af  $A, B$  består af alle "ord" i alfabetet  $A, a, B, b$  (eneste relationer:  $Aa = aA = e = Bb = bB$ ).

For eksempel:

$A, a, B, b, A^2, AB, Ab, a^2, aB, ab, BA, Ba, B^2, bA, ba, b^2, A^3, A^2B, ABA, \dots$

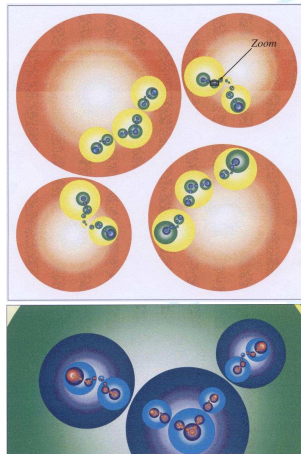
Hvordan virker transformationerne i denne (Schottky)-undergruppe på  $\overline{\mathbf{C}}$ ?



Friedrich  
Schottky  
1851 –  
1935

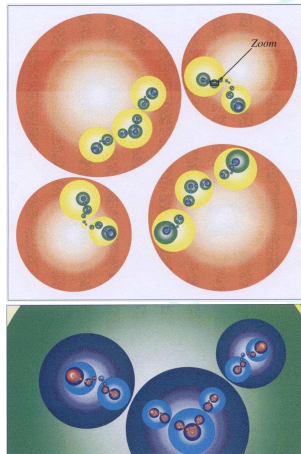
# Fra Schottkygruppe til fraktal

- Et trin: Anvend (en af) operationerne  $A, a, B, b$ .
- For hver operation: Tre ydre cirkler “kopieres” i en indre cirkel.
- Disse “nye” cirkler kopieres ved næste iteration.
- “Babushka” princip: Kopi i kopi i kopi...  $\rightsquigarrow$  et punkt i grænsemængden  $\rightsquigarrow$  **fraktal**.
- Hvordan ser denne grænsemængde ud?



# Fra Schottkygruppe til fraktal

- Et trin: Anvend (en af) operationerne  $A, a, B, b$ .
- For hver operation: Tre ydre cirkler “kopieres” i en indre cirkel.
- Disse “nye” cirkler kopieres ved næste iteration.
- “Babushka” princip: Kopi i kopi i kopi...  $\rightsquigarrow$  et punkt i grænsemængden  $\rightsquigarrow$  **fraktal**.
- Hvordan ser denne grænsemængde ud?



# Baggrund: Kleingrupper, Fuchsgrupper og grænsemængder

## Definition

**Kleingruppe:** en **diskret** (under-)gruppe af Möbiustransformationer

**Fuchsgruppe:** en Kleingruppe bestående af Möbiustransformationer som **bevarer den øvre halvplan  $H$**  (hyperbolske isometrier, reelle koefficienter)

**Orbit=bane:** af et punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  under virkningen af gruppen  $G$ :  
 $\{g \cdot z_0 \mid g \in G\}$

**Grænsemængde:**  $\Lambda(G)$ : består af alle fortætningspunkter for alle baner.

**Regulær mængde:**  $\Omega(G) := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(G)$ .

# Baggrund: Kleingrupper, Fuchsgrupper og grænsemængder

## Definition

**Kleingruppe:** en **diskret** (under-)gruppe af Möbiustransformationer

**Fuchsgruppe:** en Kleingruppe bestående af Möbiustransformationer som **bevarer den øvre halvplan  $H$**  (hyperbolske isometrier, reelle koefficienter)

**Orbit=bane:** af et punkt  $z_0 \in \mathbf{C}$  under virkningen af gruppen  $G$ :  
 $\{g \cdot z_0 \mid g \in G\}$

**Grænsemængde:**  $\Lambda(G)$ : består af alle fortætningspunkter for alle baner.

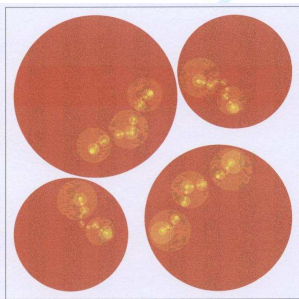
**Regulær mængde:**  $\Omega(G) := \overline{\mathbf{C}} \setminus \Lambda(G)$ .

# Grænsemængder for Schottkygrupper

med udgangspunkt i **disjunkte** cirkler

Grænsemængden  $\Lambda(G)$  for en Schottkygruppe  $G$  er en **fraktal** mængde. Den

- er **totalt usammenhængende**;
- har **positiv Hausdorff dimension**;
- har **areal 0** (fraktalt "støv").

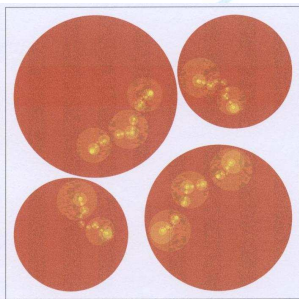


# Grænsemængder for Schottkygrupper

med udgangspunkt i **disjunkte** cirkler

Grænsemængden  $\Lambda(G)$  for en Schottkygruppe  $G$  er en **fraktal** mængde. Den

- er **totalt usammenhængende**;
- har **positiv Hausdorff dimension**;
- har **areal 0** (fraktalt "støv").

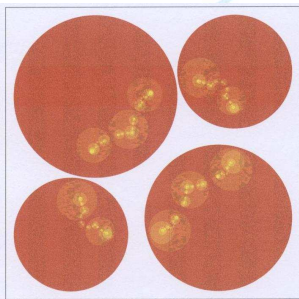


# Grænsemængder for Schottkygrupper

med udgangspunkt i **disjunkte** cirkler

Grænsemængden  $\Lambda(G)$  for en Schottkygruppe  $G$  er en **fraktal** mængde. Den

- er **totalt usammenhængende**;
- har **positiv Hausdorff dimension**;
- har **areal 0** (fraktalt “støv”).



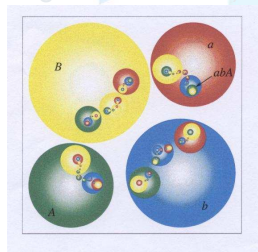
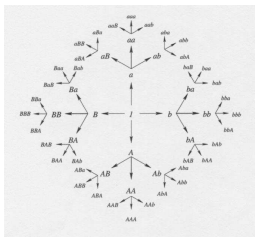
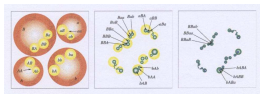


# Cayleygraf og grænsefraktal

Konvergens for “rande” i Cayleygrafen

Hver fortætningspunkt i  $\Lambda(G)$  svarer til et uendeligt ord i de fire symboler  $A, a, B, b$  (“adresser hos det fraktale postvæsen”).

Grænsefraktalen  $\Lambda(G)$  svarer også til randen af Cayleygrafen for gruppen  $G$  – det metriske rum som randene af deltræerne konvergerer imod (sidste års Abelprismodtager M. Gromov).

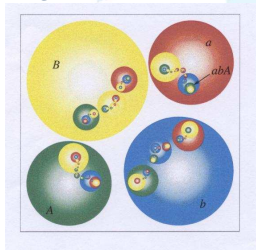
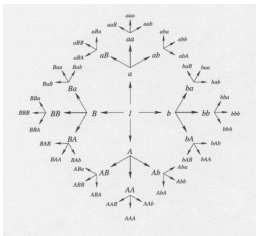
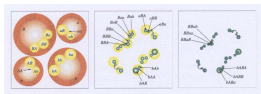


# Cayleygraf og grænsefraktal

Konvergens for “rande” i Cayleygrafen

Hver fortætningspunkt i  $\Lambda(G)$  svarer til et uendeligt ord i de fire symboler  $A, a, B, b$  (“adresser hos det fraktale postvæsen”).

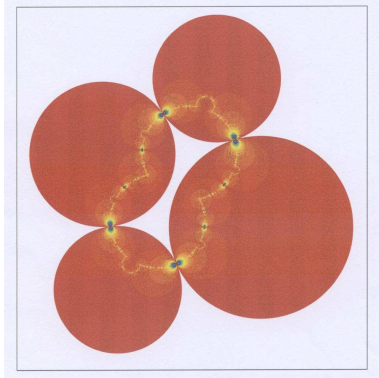
Grænsefraktalen  $\Lambda(G)$  svarer også til **randen** af Cayleygrafen for gruppen  $G$  – det metriske rum som randene af deltræerne konvergerer imod (sidste års Abelprismodtager M. Gromov).



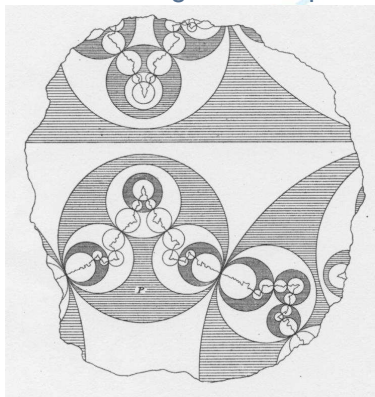
# “Kissing Schottky groups” og fraktale kurver

Når cirklerne tangerer hinanden

hænger “støvet” sammen og bliver til en **fraktal kurve**:



Det vidste F. Klein og R. Fricke allerede i 1897 – uden brug af computer!



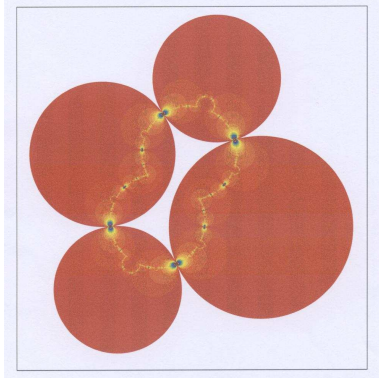
Prøv selv!



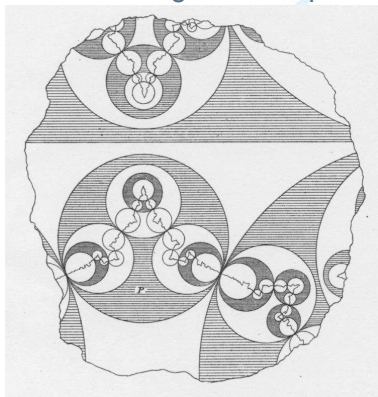
# “Kissing Schottky groups” og fraktale kurver

Når cirklerne tangerer hinanden

hænger “støvet” sammen og  
bliver til en **fraktal kurve**:



Det vidste F. Klein og  
R. Fricke allerede i 1897  
– uden brug af computer!



Prøv selv!



# Udblik til moderne forskning: Hyperbolsk geometri i 3D i Poincarés fodspor

Model: **3D kugle** med randsfære  $S^2$  (uendelig langt væk fra hvert punkt).

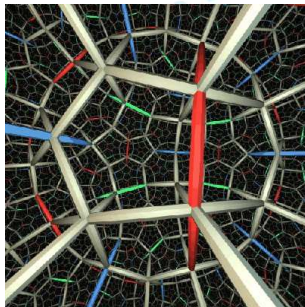
“Planer” i denne model:

Sfærestykker som skærer randsfæren i en ret vinkel.

Fører til 3D brolægning med **hyperbolske polyedre**.

Analyseres på randen  $S^2 = \overline{\mathbb{C}}$  på hvilken den fulde Möbiusgruppe  **$PGL(2, \mathbb{C})$**  hvirker.

Mange **3D-mangfoldigheder** kan forsynes med hyperbolsk struktur (Thurston, Perelman).



# Udblik til moderne forskning: Hyperbolsk geometri i 3D i Poincarés fodspor

Model: **3D kugle** med randsfære  $S^2$  (uendelig langt væk fra hvert punkt).

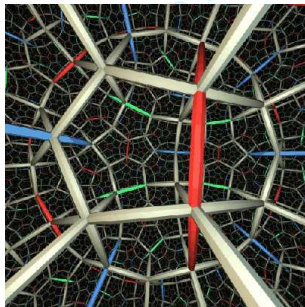
“Planer” i denne model:

Sfærestykker som skærer randsfæren i en ret vinkel.

Fører til 3D brolægning med **hyperbolske polyedre**.

Analyseres på randen  $S^2 = \overline{\mathbb{C}}$  på hvilken den fulde Möbiusgruppe  **$PGL(2, \mathbb{C})$**  hvirker.

Mange **3D-mangfoldigheder** kan forsynes med hyperbolsk struktur (Thurston, Perelman).



# Udblik til moderne forskning: Hyperbolsk geometri i 3D i Poincarés fodspor

Model: **3D kugle** med randsfære  $S^2$  (uendelig langt væk fra hvert punkt).

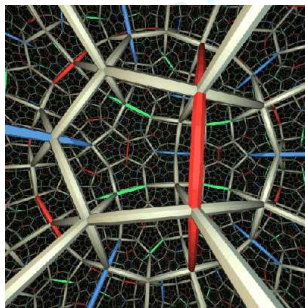
“Planer” i denne model:

Sfærestykker som skærer randsfæren i en ret vinkel.

Fører til 3D brolægning med **hyperbolske polyedre**.

Analyseres på randen  $S^2 = \overline{\mathbb{C}}$  på hvilken den fulde Möbiusgruppe  **$PGL(2, \mathbb{C})$**  hvirker.

Mange **3D-mangfoldigheder** kan forsynes med hyperbolsk struktur (Thurston, Perelman).



# Möbiustransformationer og talteori

## Modulære former

**Modulær gruppe** består af Möbiustransformationer med  
heletals koefficienter:  $PSL(2, \mathbf{Z})$ .

Virker på den øvre halvplan  $\mathbf{H}$  med.

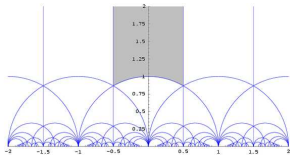
**fundamentalområder** afgrænset af cirkelbuer.

**Modulær form** Meromorf funktion som opfylder

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^k f(z).$$

Vigtigt instrument i

**Analytisk talteori** Moonshine. Fermat-Wiles-Taylor.





# Möbiustransformationer og talteori

## Modulære former

**Modulær gruppe** består af Möbiustransformationer med  
heletals koefficienter:  $PSL(2, \mathbf{Z})$ .

Virker på den øvre halvplan  $\mathbf{H}$  med.

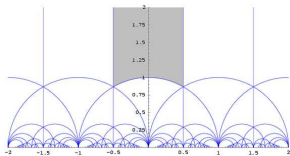
**fundamentalområder** afgrænset af cirkelbuer.

**Modulær form** Meromorf funktion som opfylder

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^k f(z).$$

Vigtigt instrument i

**Analytisk talteori** Moonshine. Fermat-Wiles-Taylor.



# Litteratur

delvis webbaseret

- D. Mumford, C. Series, D. Wright, *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, New York, 2002
- Indra's Pearls – bogens website
- A. Marden, Recension af Indra's Pearls, Notices of the AMS **50**, no.1 (2003), 38 – 44
- C. Series, D. Wright, Non-Euclidean geometry and Indra's pearls, Plus **43**, 2007
- R. Fricke, F. Klein, *Vorlesungen über die Theorie der Automorphen Functionen*, Teubner, 1897
- D. Joyce, Hyperbolic Tessellations
- Not Knot, Geometry Center, A.K. Peters
- R. van der Veen, Project Indra's Pearls

# Tak!

Næste omgang perler?

Tak for opmærksomheden!

Spørgsmål?

Næste servering perler?

# Tak!

Næste omgang perler?

Tak for opmærksomheden!

Spørgsmål?

Næste servering perler?

# Tak!

Næste omgang perler?

Tak for opmærksomheden!

Spørgsmål?

Næste servering perler?