Anvendt Lineær Algebra

Kursusgang 2

Anita Abildgaard Sillasen

Institut for Matematiske Fag

Ønsker at finde mindste kvadraters løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
Findes ved at løse $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$, men hvorfor?

To vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale hvis og kun hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$
Hvis W er et underum af $\mathbb{R}^n$, så er det ortogonale komplement til W et underum af $\mathbb{R}^n$ bestående af de vektorer, der er ortogonale på alle vektorerne i W.
Dvs. hvis $W = span\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_m}\}$, så er
$W^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \begin{bmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \ldots & \mathbf{u_m} \end{bmatrix}^T \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

Afsnit 6.3

W: et underrum af $\mathbb{R}^n$
$\mathbf{y}$: en vektor i $\mathbb{R}^n$
Så findes der entydige vektorer $\hat{\mathbf{y}}$ og $\mathbf{z}$ så

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$$

$$\hat{\mathbf{y}} \in W$$

$$\mathbf{z} \in W^{\perp}$$

Hvis $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ er en ortogonal basis for W
(altså: $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ er en basis for W
og $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ for alle $i \neq j$)
så er

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$$

og

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}.$$

$\hat{\mathbf{y}}$ kaldes den ortogonale projektion af $\mathbf{y}$ på W.
$\hat{\mathbf{y}}$ er den vektor i i W der er nærmest $\mathbf{y}$:
For alle $\mathbf{v} \in W$, $\mathbf{v} \neq \hat{\mathbf{y}}$ er $\text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) > \text{dist}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}})$.

Afsnit 6.5

Vi skal finde $\mathbf{x}$ der (næsten) er løsning til ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

hvor A er $m \times n$ og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

En mindste kvadraters løsning er en vektor $\hat{\mathbf{x}}$ som opfylder

$$\text{dist}(\mathbf{b}, A\hat{\mathbf{x}}) \leq \text{dist}(\mathbf{b}, A\mathbf{x})$$

for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$||\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}|| \leq ||\mathbf{b} - A\mathbf{x}||$$

Hvis $\hat{\mathbf{x}}$ er en løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ så er $\hat{\mathbf{x}}$ også en mindste kvadraters løsning.

Hvis $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har en løsning så er $\mathbf{b} \notin \text{Col } A$.
Lad $\hat{\mathbf{b}}$ den ortogonale projektion af $\mathbf{b}$ på underrummet Col A.
Så er

$$\text{dist}(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{b}}) \le \text{dist}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

for enhver vektor $\mathbf{c} \in \text{Col } A$.
Hvis $\hat{\mathbf{x}}$ er løsning til $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ så er

$$\text{dist}(\mathbf{b}, A\hat{\mathbf{x}}) = \text{dist}(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{b}}) \le \text{dist}(\mathbf{b}, A\mathbf{x})$$

for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. $\hat{\mathbf{x}}$ er altså en mindste kvadraters løsning.

Da $\hat{\mathbf{b}}$ er ortogonal projektionen af $\mathbf{b}$ på Col A er

$$\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}} \in (\text{Col } A)^{\perp}.$$

Altså: $\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$ er ortogonal på søjlerne i $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]$.
Derfor er

$$A^T(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{a}_1 & \dots \\ \dots & \mathbf{a}_2 & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \mathbf{a}_n & \dots \end{bmatrix} (\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Hvis $\hat{\mathbf{x}}$ er en mindste kvadraters løsning så har vi altså:

$$A^T(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.$$

$$A^T\mathbf{b} - A^TA\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}.$$

$$A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}.$$

Normalligningen for $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er

$$A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}.$$

$\hat{\mathbf{x}}$ er en mindste kvadraters løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
hvis og kun hvis
$\hat{\mathbf{x}}$ er løsning til normalligningen $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

Hvis søjlerne i A er lineært uafhængige så har $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ en entydig løsning.

Hvis søjlerne i A er lineært afhængige så er der frie variable og dermed uendeligt mange løsning til $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$.

Dette uddybes på næste side.

Hvis søjlerne i A er lineært uafhængige så er $A^T A$ invertibel og normalligningen

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

har en entydig løsning:

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b}.$$

Der er så altså en entydig mindste kvadraters løsning.

Hvis søjlerne i A er lineært afhængige så er $A^T A$ ikke invertibel.

Afstanden mellem to punkter har en (ukendt) værdi x.
Vi foretager en måling af afstanden og finder værdien b_1.
Vi har så $x = b_1 + \hat{r}_1$, hvor $\hat{r}_1$ angiver en fejl i målingen.
Vi gentager målingen ind til vi har m målinger/observationer:

$$
\begin{aligned}
x &= b_1 + \hat{r}_1 \\
x &= b_2 + \hat{r}_2 \\
&\vdots \\
x &= b_m + \hat{r}_m
\end{aligned}
$$

Vi ønsker at bestemme x så $\hat{r}_1^2 + \ldots + \hat{r}_m^2$ er så lille som muligt.

Vi skal altså finde en mindste kvadraters løsning til ligningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Vi anvender teorien med

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Vi udregner

$$A^T A = m$$

$$A^T \mathbf{b} = b_1 + \ldots + b_m$$

Normalligningen er altså

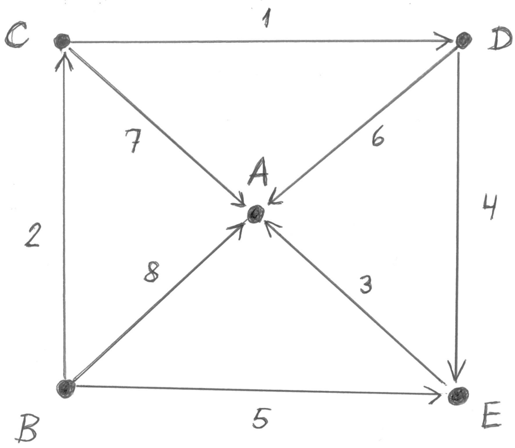
$$mx = b_1 + \ldots + b_m.$$

Mindste kvadraters løsningen er

$$\hat{x} = \frac{b_1 + \ldots + b_m}{m}.$$

Mellem fem punkter A, B, C, D, E er der målt følgende højdeforskelle:

Fra punkt	Til punkt	Højdeforskel
B	A	8
B	C	2
B	E	5
C	A	7
C	D	1
D	A	6
D	E	4
E	A	3


C
1
D
7
6
A
4
2
8
3
B
5
E

Højderne for de fem punkter er h_A, h_B, h_C, h_D, h_E.
Observationsligninger:

$h_A - h_B = 8 + \hat{r}_1$
$h_C - h_B = 2 + \hat{r}_2$
$h_E - h_B = 5 + \hat{r}_3$
$h_A - h_C = 7 + \hat{r}_4$
$h_D - h_C = 1 + \hat{r}_5$
$h_A - h_D = 6 + \hat{r}_6$
$h_E - h_D = 4 + \hat{r}_7$
$h_A - h_E = 3 + \hat{r}_8$

På matrixform:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_A \\ h_B \\ h_C \\ h_D \\ h_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \\ \hat{r}_4 \\ \hat{r}_5 \\ \hat{r}_6 \\ \hat{r}_7 \\ \hat{r}_8 \end{bmatrix}$$

Sæt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

og find mindste kvadraters løsning til

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Udregn

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

og

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -15 \\ -6 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Udvidet koefficientmatrix for normalligningen $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 24 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & -15 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & -9 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{27}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindste kvadraters løsninger:

$$\begin{bmatrix} h_A \\ h_B \\ h_C \\ h_D \\ h_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} + t \\ -\frac{27}{5} + t \\ -4 + t \\ -\frac{17}{5} + t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8 + t \\ -5.4 + t \\ -4 + t \\ -3.4 + t \\ t \end{bmatrix},$$

hvor t er en fri variabel.

Antag nu at E et fikspunkt med højde 10. Vi kan så erstatte h_E med 10 i ligningerne.
Observationsligninger:

$h_A - h_B = 8 + \hat{r}_1$
$h_C - h_B = 2 + \hat{r}_2$
$-h_B = -5 + \hat{r}_3$
$h_A - h_C = 7 + \hat{r}_4$
$h_D - h_C = 1 + \hat{r}_5$
$h_A - h_D = 6 + \hat{r}_6$
$-h_D = -6 + \hat{r}_7$
$h_A = 13 + \hat{r}_8$

Sæt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -5 \\ 7 \\ 1 \\ 6 \\ -6 \\ 13 \end{bmatrix},$$

og find mindste kvadraters løsning til

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Søjlerne i A er nu lineært uafhængige. Der er derfor en entydig mindste kvadraters løsning:

$$\begin{bmatrix} h_A \\ h_B \\ h_C \\ h_D \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{64}{5} \\ \frac{23}{5} \\ 6 \\ \frac{33}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.8 \\ 4.6 \\ 6 \\ 6.6 \end{bmatrix}$$