Baggrundsnote til sandsynlighedsregning

1 Kombinatorik

1.1 Multiplikationsprincippet

En mængde bestående af n forskellige elementer kaldes her en n-mængde.

Elementerne i en m-mængde og elementerne i en n-mængde kan parres på i alt $m\,n$ forskellige måder.

Princippet kan udstrækkes til at omhandle endelige mange mængder.

Eksempel 1.1. Ved konfiguration af en computer kan der vælges mellem 3 skærmtyper, 6 harddiske, 5 størrelser RAM og 2 CPU-fabrikater. I alt kan computeren konfigureres på $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = 180$ forskellige måder. □

Eksempel 1.2. En tipskupon kan udfyldes på $3^{13} = 1.594.323$ forskellige måder. □

1.2 Permutationer

En ordning af en mængde betyder en opstilling af elementerne i en bestemt rækkefølge (eller blot en nummering af elementerne).

k elementer fra en n-mængde kan i henhold til multiplikationsprincippet udvælges og nummeres på

$$(n)_k = n\,(n-1)\ldots(n-k+1)$$

forskellige måder. For $(n)_n = n\,(n-1)\ldots 1$ benytter vi skrivemåden $n!$, hvorefter

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Konvention: Såvel $(n)_0$ som $0!$ sættes til 1 .

Eksempel 1.3. Blandt 10 ansøgere til en stilling skal 3 udvælges og prioriteres. Dette kan gøres på $(10)_3 = 720$ forskellige måder. □

Eksempel 1.4. n personer kan stilles op på $n!$ forskellige måder på en række, men kun $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ forskellige måder i en cirkel. □

En afbildning af mængden $\{1, \ldots, n\}$ på sig selv kaldes en permutation. Mængden af permutationer S_n udgør en gruppe, den såkaldte symmetriske gruppe af n'te orden. $(S_n, \circ)$ har præcis $n!$ elementer.

Fra mængden af forskellige ordninger af en n-mængde kan der defineres en bijektiv afbildning på S_n. Vi siger derfor, at en n-mængdes elementer kan permuteres på $n!$ forskellige måder. En bestemt rækkefølge (nummerering) af n-mængdens elementer kaldes en permutation af elementerne.

Eksempel 1.5. Elementerne i $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ kan permuteres på $3! = 6$ forskellige måder:

$$\begin{array}{ll} (\alpha,\beta,\gamma),(\beta,\gamma,\alpha),(\gamma,\alpha,\beta) & \text{er lige permutationer *} \\ (\alpha,\gamma,\beta),(\beta,\alpha,\gamma),(\gamma,\beta,\alpha) & \text{er ulige permutationer *} \end{array}$$

* med $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (1, 2, 3)$ □

1.3 Kombinationer

k elementer fra en n-mængde kan udvælges uden hensyn til rækkefølge på

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

forskellige måder. En k-mængde udtaget fra en n-mængde uden efterfølgende ordning kaldes en kombination. $\binom{n}{k}$ er altså antallet af forskellige kombinationer ved udtagning af k elementer fra en n-mængde.

Bemærk, at $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$

Eksempel 1.6. En bridgehånd kan forekomme på $\binom{52}{13} = 636.013.559.600$ forskellige måder. □

Eksempel 1.7. En bridgehånd med to esser kan forekomme på $\binom{4}{2}\binom{48}{11} = 135.571.202.208$ forskellige måder. □

Eksempel 1.8. En bridgehånd med mindst to esser kan forekomme på $\binom{4}{2}\binom{48}{11} + \binom{4}{3}\binom{48}{10} + \binom{4}{4}\binom{48}{9} = 163.411.172.432$ forskellige måder. Alternativ udregning: $\binom{52}{13} - \binom{4}{0}\binom{48}{13} - \binom{4}{1}\binom{48}{12}$. □

$\binom{n}{k}$ kan opdeles i de kombinationer, der indeholder et givet element, og de kombinationer, der ikke indeholder dette element, dvs.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad k = 1, \ldots, n$$

Et par andre formler:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{(antal forskellige delmængder af en } n\text{-mængde, } \varnothing \text{ medregnet)}$$

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}, \qquad \text{specielt} \quad \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \binom{2n}{n}$$

En n-mængde kan opdeles i m delmængder med hver k_i elementer, $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$. Dette kan gøres på

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \, \ldots \, k_m!}$$

forskellige måder.

Eksempel 1.9. 10 personer skal opdeles i tre hold, ét på 4 og to på hver 3 deltagere. Antallet af forskellige holdopdelinger, der kan foretages, er $\binom{10}{4,3,3} = 4.200$. $\square$

Bemærk, at $\binom{n}{k_1,k_2} = \binom{n}{k}$, hvor $k = k_1$ (og dermed $k_2 = n - k$).

1.4 Udtagning af stikprøver

k elementer udtages blandt n. Der skelnes mellem udtagning med tilbagelægning (efter at det udtagne element er iagttaget) og udtagning uden tilbagelægning. Ved udtagning med tilbagelægning har det enkelte element altså mulighed for at komme med i stikprøven flere gange. Der skelnes også mellem ordnede og uordnede stikprøver. Antallet af forskellige stikprøver, der kan forekomme afhængig af vilkårene, fremgår af følgende skema:

	med tilbagelægning	uden tilbagelægning
med ordning	n^k	$(n)_k$
uden ordning	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Eksempel 1.10. Antal forskellige mønstre af øjne, der kan forekomme ved kast af tre terninger, er $\binom{6+3-1}{3} = 56$. $\square$

2 Summer

2.1 Sum, kvadratsum og kubiksum af tallene $1, \ldots, n$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Bemærk, at $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

2.2 Differens- og kvotientrækker

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a + k\,d) = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)\,, \quad \text{hvor} \quad a_1 = a \quad \text{og} \quad a_n = a + (n-1)\,d$$

Eksempel 2.1. Summen af tallene $4, 7, 10, \ldots, 28$ er $\frac{9}{2}(4 + 28) = 144$. $\square$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a\,q^k = a\,\frac{q^n-1}{q-1} \qquad \text{eller} \qquad \sum_{k=1}^{n} a\,q^k = a\,q\,\frac{q^n-1}{q-1}$$

Eksempel 2.2. Summen af tallene $\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}$ er $\frac{3}{2}\,\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5-1}{\frac{3}{2}-1} = \frac{633}{32}$. $\square$

2.3 Uendelige kvotientrækker og afledte rækker

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\,q^n = a\,\frac{1}{1-q}, \quad |q|<1 \qquad \text{eller} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a\,q^n = a\,\frac{q}{1-q}, \quad |q|<1$$

En uendelig kvotientrække kaldes også for en geometrisk række.

Eksempel 2.3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$\square$

Ved ledvis differentiation mht. til q i $\sum_{n=0}^{\infty} a\,q^n$ (tilladt!) får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\,n\,q^{n-1} = a\,\frac{1}{(1-q)^2}, \quad |q|<1, \quad \text{og ved fortsat differentiation}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a\,n\,(n-1)\,q^{n-2} = a\,\frac{2}{(1-q)^3}, \quad |q|<1, \quad \text{som er ækvivalent med}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\,(n+1)\,n\,q^{n-1} = a\,\frac{2}{(1-q)^3}, \quad |q|<1.$$

Eksempel 2.4.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\,\frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4}\,\frac{n(n-1)}{2^{n-2}} = \frac{1}{4}\,\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 4$$

$\square$

2.4 Binomialformlen

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = (a+b)^n$$

Tallene $\binom{n}{k}, k = 0, \ldots, n$, kaldes her for binomialkoefficienter.

Formlen $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, $k = 1, \ldots, n$, udgør sammen med $\binom{n}{0} = 1$ og $\binom{n}{n} = 1$ grundlaget for Pascals trekant.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & - & -
\end{array}$$

Eksempel 2.5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $\square$

2.5 Diverse rækker

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \text{idet} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \quad \text{for } n \to \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{er divergent} \quad \text{(rækken kaldes den harmoniske række)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{er} \quad \begin{cases} \text{divergent for } \alpha \leqq 1 \\ \text{konvergent for } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \quad \text{er} \quad \begin{cases} \text{divergent for } \alpha \leqq 0 \\ \text{betinget konvergent for } 0 < \alpha \leqq 1 \\ \text{absolut konvergent for } \alpha > 1 \end{cases}$$

En række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, når $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer, og betinget konvergent, når $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, og $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergerer.

3 Calculus

3.1 En grænseværdi

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Bemærk, at

$$\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}.$$

Anvendelse af L'Hospitals regel på dette udtryk giver

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + \frac{x}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{x}{n}} \left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1 + \frac{x}{n}} = x \, ,$$

hvoraf resultat følger.

3.2 Potensrækker

En potensrække er en funktion af formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. En sådan række er absolut konvergent i et interval $|x| < \lambda$ og divergent for $|x| > \lambda$. Tallet λ kaldes rækkens konvergensradius.

I intervalendepunkterne kan rækken være absolut konvergent, betinget konvergent eller divergent. Konvergensintervallet kan udarte til punktet $x = 0$, hvor en potensrække altid er konvergent, eller til hele den reelle akse.

Ved ledvis differentiation eller ledvis integration $\left(\int_0^x a_n t^n dt\right)$ fremkommer en ny potensrække med samme konvergensradius.

Mange velkendte funktioner kan udvikles i en potensrække. Ved at benytte udviklingspunktet $x = 0$ i Taylors formel og ved at medtage uendelige mange led fremkommer de såkaldte Maclaurinrækker. Et lille udvalg med tilhørende konvergensinterval følger her:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$$

(den geometriske række)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leqq 1$$

(Mercators række)

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots, \quad -1 \leqq x < 1$$

Ved at udvide definitionen af binomialkoefficienter til

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots, \qquad \binom{\alpha}{0} = 1,$$

for ethvert reelt α, kan vi udtrykke $(1+x)^\alpha$ i en potensrække:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha\, x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$$

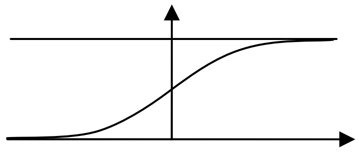
Når $\alpha \in \mathbb{N}$ bliver antallet af led endeligt (jf. binomialformlen), og rækken konvergerer overalt.

Potensrækker for bl.a. $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arctan x$, $\cosh x$ og $\sinh x$ kan også bestemmes.

3.3 Specielle funktioner

Phifunktionen

$$\Phi: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$



Bemærk, at

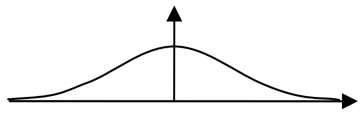
$$\forall x: \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \qquad \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$$

Specielle værdier:

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} \Phi(x) = 1$$

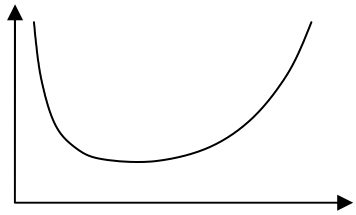
Ved differentiation:

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Gammafunktionen

$$\Gamma: \quad \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$



Bemærk, at

$$\forall x: \quad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

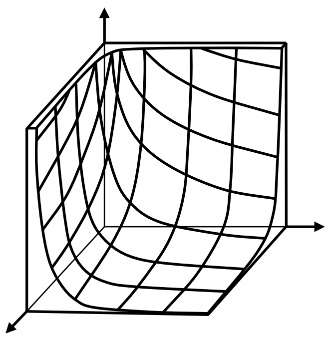
Specielle værdier:

$$\begin{array}{ll} \Gamma(1) = 1, & \Gamma(n) = (n-1)!\,,\ n \in \mathbb{N} \\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, & \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}\,,\ n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Betafunktionen

$$\mathrm{B}: \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$$

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$$



Bemærk, at

$$\forall x, y > 0: \quad \mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

3.4 Jacobideterminanter

Betragt $F:\ D \to \mathbb{R}^m$, hvor $F = (f_1, \dots, f_m) \in C^1(D)$, $D \subseteqq \mathbb{R}^n$

De partielle afledede $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$, kan naturligt arrangeres i en $m \times n$ matrix, den såkaldte Jacobimatrix.

Når $m = n$, bliver Jacobimatricen kvadratisk. Den tilhørende determinant kaldes Jacobideterminanten og noteres $J(x_1, \dots, x_n)$ eller $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$. Vi har altså

$$J(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} .$$

Når F er enentydig, kan en invers afbildning F^{-1} bestemmes. Endvidere når $J(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, gælder om Jacobideterminanterne for F og F^{-1}, at

$$J_{F^{-1}}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{J_F(x_1, \dots, x_n)} , \quad y_i = f_i(x_i, \dots, x_n) , \quad i = 1, \dots, n$$

eller med den alternative skrivemåde

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = 1 .$$

Eksempel 3.1. Skift fra rektangulære til polære koordinater.

$$F: \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 , \quad (r, \theta) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \arctan \frac{y}{x} \right) \quad ^{*)}$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Inverst koordinatskifte:

$$F^{-1}: \quad]0;\infty[\times [0;\, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 , \quad (x,y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

$$J(r,\, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Kontrol : $J(x,y)\, J(r,\, \theta) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, r = \frac{1}{r}\, r = 1$ □

Eksempel 3.2. Skift fra rektangulære til sfæriske koordinater.

$$F: \quad \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3,$$

$$(\rho, \varphi, \theta) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \arctan \frac{y}{x} \right) \quad ^{*)}$$

---

*) Betegnelsen arctan dækker over flere funktionsgrene. Fortegnskombinationen af x og y bestemmer, hvilken gren der benyttes.

Her er det regneteknisk det enkleste først at bestemme Jacobideterminanten hørende til det inverse koordinatskifte:

$$F^{-1}: \quad]0;\infty[\times]0;\pi[\times [0;2\pi[\to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z) = (\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi)$$

$$J(\rho,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \ldots = \rho^2\sin\varphi$$

$$J(x,y,z) = \frac{1}{J(\rho,\varphi,\theta)} = \frac{1}{\rho^2\sin\varphi} = \ldots = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \square$$

Eksempel 3.3. Betragt den lineære transformation $F:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ F(\bar{x}) = A\bar{x}$. Idet $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij},\ i,\ ,j = 1,\ \ldots,\ m$, har vi umiddelbart $J(\bar{x}) = \det A$. $\square$

3.5 Variabelskift i plan- og rumintegraler

Planintegraler

Betragt

$$\int_D f(x,y)\,dA \quad \text{samt} \quad G = (g_1,g_2) : D \to \mathbb{R}^2,\ (u,v) = (g_1(x,y),\ g_2(x,y)),$$

hvor G er enentydig. Der gælder

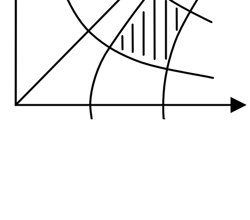
$$\int_D f(x,y)\,dA = \int_{G(D)} f\circ G^{-1}(u,v)\,|J_{G^{-1}}(u,v)|\,dA\,.$$

Bemærk, at det er den numeriske værdi af Jacobideterminanten hørende til den inverse afbildning, som indgår i formlen.

Eksempel 3.4.

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}|r|\,dr\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}2\pi\left[e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 1\end{aligned} \qquad \square$$

Eksempel 3.5. Inertimomentet mht. $(0,0)$ af et plant område D med densitet 1 beligggende i første kvadrant mellem hyperblerne $x\,y = 1$, $x\,y = 3$, $x^2 - y^2 = 1$ og $x^2 - y^2 = 4$.



$$I_0 = \int_D (x^2+y^2)\,dA$$

Sæt $u = x\,y$ og $v = x^2 - y^2$, hvorefter

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -\,2y^2 - 2x^2 = -2(x^2+y^2)\,.$$

Bemærk, at

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = v^2 + 4u^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2 = \sqrt{4u^2+v^2},$$

dvs.

$$J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)} = \frac{1}{-2(x^2+y^2)} = -\frac{1}{2\sqrt{4u^2+v^2}}\,,$$

og dermed at

$$I_0 = \int_1^3 \int_1^4 \sqrt{4u^2+v^2}\,\left|-\frac{1}{2\sqrt{4u^2+v^2}}\right| dv\,du = \frac{1}{2}(3-1)(4-1) = 3\,. \qquad \square$$

Rumintegraler

Betragt

$$\int_D f(x,y,z)\,dV \qquad \text{samt} \qquad G = (g_1, g_2, g_s) :\; D \to \mathbb{R}^3,$$
$$(u,v,w) = (g_1(x,y,z),\; g_2(x,y,z),\; g_3(x,y,z))\,,$$

hvor G er enentydig. Der gælder

$$\int_D f(x,y,z)\,dV = \int_{G(D)} f \circ G^{-1}(u,v,w)\,|J_{G^{-1}}(u,v,w)|\,dV\,.$$

Eksempel 3.6. Inertimomentet om z-aksen af en kugle K med radius a og densitet 1 er $I_z = \int_K (x^2+y^2)\,dV$. Ved skift til sfæriske koordinater får vi

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \rho^2 \sin^2\varphi\,\left|\rho^2 \sin\varphi\right| d\rho\,d\varphi\,d\theta = 2\pi \int_0^{\pi} \int_0^{a} \rho^4 \sin^3\varphi\,d\rho\,d\varphi \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi\right]_0^{\pi} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{a} = \frac{8\pi a^5}{15}\,. \end{aligned} \qquad \square$$

3.6 Foldning

Betragt $f,\, g :\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hvor f og g er stykkevis kontinuerte, og hvor mindst én af funktionerne er absolut integrabel, den anden begrænset.

Funktionen $f * g$, hvor

$$f * g\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,g(t-u)\,du,$$

kaldes foldningen af f og g.

Hvis f og/eller g er identisk 0 i visse intervaller, bliver intervallet, der skal integreres over, en delmængde af $]-\infty;\,\infty[$.

Eksempel 3.7.

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ e^{-x} & \text{for } x \geqq 0 \end{cases}$$

$$f * g\,(t) = \int_0^t e^{-u} e^{-(t-u)} du = \int_0^t e^{-t} du = te^{-t}, \quad 0 \leqq t < \infty \qquad \square$$

Eksempel 3.8.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x < 0 \\ e^{-x} & \text{for} \quad x \geqq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{for} \quad x \leqq 0 \\ 0 & \text{for} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$f * g\,(t) = \int_t^\infty e^{-u} e^{t-u} du = e^t \int_t^\infty e^{-2u} du = e^t \left[-\tfrac{1}{2} e^{-2u}\right]_t^\infty = \tfrac{1}{2} e^{-t},$$

$$0 \leqq t < \infty \qquad \square$$

Eksempel 3.9.

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\begin{aligned} f * g\,(t) &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-u)^2}{2}} du = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(u^2 - tu)} du \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{4}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\left(u - \frac{t}{2}\right)^2} du\,; \qquad v = \sqrt{2}\left(u - \frac{t}{2}\right),\ dv = \sqrt{2} du \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{4}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dv = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{4}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-v^2}{2}} dv \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{4}}, \quad -\infty < t < \infty \qquad \square \end{aligned}$$

3.7 Stirlings formel

Approksimation af n!

$$n! \approx n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} \quad \text{for n 'stor'}$$

11.6.2010
Bo Rosbjerg