Reeksamen i Calculus

Torsdag den 11. august 2011

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
og
Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Nærværende eksamenssæt består af 8 nummererede sider med ialt 12 opgaver.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der **må ikke** benyttes elektroniske hjælpemidler.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Eksamenssættet har to uafhængige dele.

- Del I indeholder ”almindelige opgaver”. I forbindelse med del I er det vigtigt, at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang.
- Del II indeholder ”multiple choice”opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive dit fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst!

NAVN: ________________________________

STUDIENUMMMER: ________________________________

HOLD NUMMER: ☐ Hold 3 (v. Jacob Broe)
☐ Hold 4 (v. Morten Nielsen)
☐ Hold 5 (v. Bo Rosbjerg)

Del I (”almindelige opgaver”)

Opgave 1 (8%)

Området T er i rummet afgrænset af fladerne $z = (x^2 + y^2)^2$ og $z = 1$.

- Bestem volumen af T [vink: cylinderkoordinater].

Opgave 2 (8%)

Der er givet en funktion $f(x)$ med den egenskab, at dens Taylorpolynomium af 3. grad med udviklingspunkt $a = 0$ er

$$P_3(x) = 2 - x + 3x^2 - x^3.$$

(a) Bestem værdien $f(0)$.

(b) Bestem værdien $f'(0)$.

(c) Bestem værdien $f''(0)$.

Opgave 3 (8%)

Betragt

$$f(x,y) = x^3y - 2xy^2.$$

(a) Bestem den partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

(b) Bestem den partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

(c) Bestem en ligning for tangentplanen til fladen $z = f(x,y)$ gennem punktet $(1,1,-1)$.

Opgave 4 (10%)

Beregn planintegralet af $f(x,y) = x^2 + y^2$ over området

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Opgave 5 (7%)

Løs den binome ligning

$$z^3 = 8,$$

hvor løsningerne skal angives på formen $a + ib$, med $a, b \in \mathbb{R}$.

Opgave 6 (8%)

Der er givet et komplekst tal $z = 1 + i$.

(a) Bestem modulus af z^4.

(b) Bestem modulus af z^{-4}.

(c) Skriv det komplekse tal z^4 på polær form.

Opgave 7 (8%)

Betragt funktionen

$$f(x, y, z) = xy^2z^3.$$

(a) Bestem gradientvektoren $\nabla f(x, y, z)$.

(b) Bestem den retningsafledede af f i punktet $P(1, 1, 1)$ i retningen givet ved $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

Opgave 8 (12%)

(a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

(b) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = x + 1.$$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Bemærkning. I opgaverne 9 og 10 evalueres der efter følgende princip: hver forkert afkrydsning ophæver én rigtigt afkrydsning. Man får derfor *intet* ud af "helgarderinger".

Opgave 9 (7%)

Betragt et komplekst polynomium $p(z)$ af grad 5 med *reelle koefficienter*. Marker samtlige korrekte udsagn nedenfor.

- ☐ Der findes et $a \in \mathbb{R}$, således at $p(z)$ kan skrives $p(z) = (z - a)q(z)$, hvor $q(z)$ er et polynomium af grad 4.
- ☐ $q(z)$ kan *altid* faktoriseres som et produkt udelukkende bestående af 1. og 2. grads polynomier med reelle coefficienter
- ☐ $q(z)$ indeholder altid mindst én lineær reel faktor
- ☐ $q(z)$ har altid 5 forskellige komplekse rødder
- ☐ $q(z)$ kan faktoriseres udelukkende ved brug af 1. ordens polynomier med reelle koefficienter
- ☐ $p(z)$ har muligvis ingen rødder i den komplekse plan.

Opgave 10 (7%)

Betragt en funktion $f(x,y)$ af to variable defineret på $\mathbb{R}^2$. Det oplyses at de partielle afledede f_x og f_y eksisterer og er kontinuerte i en omegn af punktet $P(a,b)$. Marker samtlige korrekte udsagn nedenfor.

☐ f er kontinuert i $P(a,b)$.

☐ Samtlige retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(a,b)$ eksisterer.

☐ Der gælder altid, at

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a} = 0.$$

☐ f er differentiabel i $P(a,b)$.

☐ Der gælder ikke nødvendigvis, at $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Opgave 11 (10%).

Besvar følgende 5 sand/falsk opgaver:

a. For to komplekse tal $z_1 = a_1 + ib_1$ og $z_2 = a_2 + ib_2$, med $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, gælder altid, at

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

☐ Sand ☐ Falsk

b. Der gælder, at

$$\arccos(\cos x)) = x, \qquad \text{for alle } x \in [0, \pi].$$

☐ Sand ☐ Falsk

c. Lad a, b og c være reelle konstanter. Så har differentialligningen

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = x^3,$$

præcis én løsning.

☐ Sand ☐ Falsk

d. Funktionen $f(x, y, z)$ er defineret på $\mathbb{R}^3$, og alle retningsafledede for f eksisterer i punktet $P(0, 0, -3)$. Så eksisterer samtlige partielle afledede af 1. orden af f i $P(0, 0, -3)$.

☐ Sand ☐ Falsk

e. Et komplekst polynomium af grad n, $n \geq 1$, har præcis n forskellige komplekse rødder.

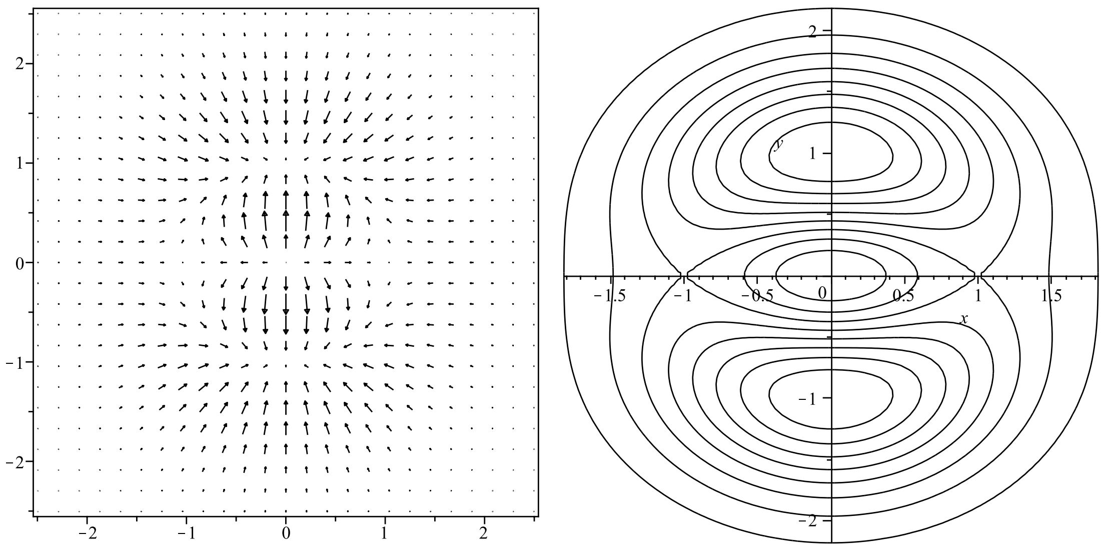
☐ Sand ☐ Falsk

Opgave 12 (6%)

En funktion $f(x, y)$ er defineret på kvadratet

$$R = \{(x, y) : -5/2 \leq x, y \leq 5/2\}.$$

De to figurer nedenfor viser hhv. udvalgte gradientvektorer og niveaukurver for funktionen i dette kvadrat. Funktionen har tre kritiske punkter i R, med koordinaterne $(0, 0)$ og $(0, \pm 1)$. Afgør ud fra plottene typen af hver af de kritiske punkter, og markér svaret nedenfor.



(a) I punktet $(0, 0)$ har f et:

- ☐ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt.

(b) I punktet $(0, -1)$ har f et:

- ☐ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt.

(c) I punktet $(0, 1)$ har f et:

- ☐ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt.