Elementær sandsynlighedsregning

Sandsynlighedsbegrebet

Et udfaldsrum S er mængden af alle de mulige udfald af et eksperiment.

En hændelse A er en delmængde af udfaldsrummet S.

Den hændelse, der ikke indeholder noget udfald, betegnes $\varnothing$.

Et sandsynlighedsmål er en funktion P, der afbilder hændelser ind i intervallet $[0;1]$. Funktionen P skal opfylde

$$P(S) = 1$$
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
$$\forall i \neq j: \; A_i \cap A_j = \varnothing \quad \Rightarrow \quad P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$ [1)]

Der gælder blandt andet

$$P(\varnothing) = 0$$
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Betinget sandsynlighed:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

A og B er uafhængige, hvis

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B) \text{ for alle } A,\, B$$

Uafhængighed medfører, at

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{og} \quad P(B|A) = P(B)$$

Lad $A_1, A_2, \ldots, A_n$ være en klassedeling af S, dvs.

$$\forall i \neq j: \; A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{og} \quad A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$$ [1)]

[1)] Definitionen kan udvides til at gælde uendeligt, men tælleligt mange hændelser, dvs. $E_1 \cup E_2 \cup \cdots = S$.

Loven om total sandsynlighed:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\, P(A_i) \qquad ^{1)}$$

Bayes' formel:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)\, P(A_j)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)\, P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\, P(A_i)}, \quad j = 1, \ldots, n \qquad ^{1)}$$

Symmetrisk sandsynlighed: Når alle udfald i S har samme sandsynlighed, kan sandsynligheden for en hændelse A udregnes ved at tælle, hvor mange udfald der hører til A, og dividere med antallet af udfald i S. Altså

$$P(A) = \frac{\#\text{ gunstige}}{\#\text{ mulige}}$$

Stokastisk variabel

En stokastisk variabel X er en reel funktion defineret på udfaldsrummet S, dvs. $X : S \to \mathbb{R}$, $X(s) = x$, $s \in S$

X er diskret, når X antager endeligt mange værdier eller højst tælleligt mange værdier.

X er kontinuert, når X antager flere end tælleligt mange værdier.

Diskrete fordelinger

Sandsynlighedsfunktion for en diskret stokastisk variabel:

$$p(x_k) = P(X = x_k)$$

Når X er heltallig, dvs. når X kun antager hele tal som værdier, kan sandsynlighedsfunktionen skrives

$$p(k) = P(X = k)$$

Fordelingsfunktion:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{k: x_k \le x} p(x_k), \quad x \in \mathbb{R}$$

Middelværdi af X:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_k x_k\, p(x_k) = \mu$$

Middelværdi af en afledt stokastisk variabel $g(X)$:

$$\mathrm{E}[g(X)] = \sum_k g(x_k)\, p(x_k)$$

1) Formlen modificeres, når klassedelingen af S består af uendeligt, men tælleligt mange hændelser.

Varians af X:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \sigma^2$$

Spredning:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Eksempel 1. Kast med en terning. Lad X betegne antal øjne.

$$\begin{aligned} p(k) &= \frac{1}{6}, \quad k = 1, 2, \ldots, 6 \\ \mathrm{E}[X] &= \sum_{k=1}^{6} k\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\frac{6(6+1)}{2} = \frac{7}{2} \quad {}^{1)} \\ \mathrm{E}[X^2] &= \sum_{k=1}^{6} k^2\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = \frac{91}{6} \quad {}^{1)} \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12} \end{aligned}$$

Lad Y betegne antal kast, der medgår, indtil en sekser fremkommer.

$$\begin{aligned} p(k) &= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \\ \mathrm{E}[Y] &= \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} = 6 \quad {}^{2)} \\ \mathrm{E}[(Y+1)Y] &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\frac{2}{(1-\frac{5}{6})^3} = 72 \quad {}^{2)} \\ \mathrm{E}[Y^2] &= E[(Y+1)Y] - \mathrm{E}[Y] = 72 - 6 = 66 \\ \mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{E}[Y^2] - (\mathrm{E}[Y])^2 = 66 - 6^2 = 30 \end{aligned}$$

□

Indikatorvariabel. Lad I_A betegne indikatorvariabel for hændelsen A, dvs. I_A antager værdien 1, når A forekommer, og værdien 0, når A^c forekommer. Sæt $P(A) = p$.

$$\mathrm{E}[I_A] = p, \qquad \mathrm{Var}(I_A) = p(1-p)$$

Binomialfordelingen. Lad X være antal gange en hændelse A forekommer blandt n uafhængige gentagelser af et forsøg. Sæt $P(A) = p$. Bemærk, at X kan opfattes som en sum af indikatorvariable for hændelsen A, dvs. $X = I_{A_1} + I_{A_2} + \ldots + I_{A_n}$.

$$\begin{aligned} p(k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n \\ \mathrm{E}[X] &= np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p) \end{aligned}$$

At X er binomialfordelt med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p, skrives kort $X \sim b(n, p)$.

1) Vedr. summationer, se baggrundsnote til sandsynlighedsregning side 3

2) Vedr. summationer, se baggrundsnote til sandsynlighedsregning side 4

Poissonfordelingen. Lad λ være det gennemsnitlige antal begivenheder, der indtræffer i et område (interval), og lad X være det antal begivenheder, der indtræffer.

$$p(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\mathrm{E}[X] = \lambda, \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda$$

At X er Poissonfordelt med parameter λ, skrives kort $X \sim p(\lambda)$.

Kontinuerte fordelinger

Fordelingsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemærk, at der gælder

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$

Hvis der findes en stykkevis kontinuert funktion f, der opfylder

$$f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = F(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

så kaldes f tæthedsfunktion for X. Der gælder blandt andet

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$
$$P(X = x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$P(a < X \leq x) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Middelværdi af X:

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \mu$$

Middelværdi af en afledt stokastisk variabel $g(X)$:

$$\mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx$$

Varians af X:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \sigma^2$$

Spredning:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Eksempel 2. Lad X være en stokastisk variabel med tæthedsfunktion $f(x) = 3x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\mathrm{E}[X] = \int_{0}^{1} x\ 3x^2 dx = 3\Big[\frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$\mathrm{E}[X^2] = \int_0^1 x^2\ 3x^2 dx = 3\Big[\frac{x^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{3}{5}$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{5} - \Big(\frac{3}{4}\Big)^2 = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80} = 0.0375$$

Lad $Y = \sqrt{X}$ være en afledt stokastisk variabel.

$$\mathrm{E}[Y] = \int_0^1 \sqrt{x}\ 3x^2 dx = 3\Big[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big]_0^1 = \frac{6}{7}$$
$$\mathrm{E}[Y^2] = \int_0^1 (\sqrt{x})^2\ 3x^2 dx = \frac{3}{4}$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{3}{4} - \Big(\frac{6}{7}\Big)^2 = \frac{147-144}{196} = \frac{3}{196} \approx 0.0153$$ □

Ligefordeling på interval. $X \sim U[a;b]$.

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \le x \le b$$
$$\mathrm{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{b^2-a^2}{12}$$

Eksponentialfordelingen. $X \sim e(\lambda)$.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \ge 0$$
$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Normalfordelingen. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$
$$\mathrm{E}[X] = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Todimensional stokastisk variabel

Diskrete fordelinger

Simultan sandsynlighedsfunktion for en todimensional diskret variabel (X, Y):

$$p(x_j, y_k) = P(X = x_j, Y = y_k) = P(X = x_j \cap Y = y_k)$$

Marginal sandsynlighedsfunktion

$$\text{for } X: \qquad p_X(x_j) = P(X = x_j) = \sum_k p(x_j, y_k)$$
$$\text{for } Y: \qquad p_Y(y_k) = P(Y = y_k) = \sum_j p(x_j, y_k)$$

Middelværdi af en afledt endimensional stokastisk variable $g(X, Y)$:

$$\mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_j \sum_k g(x_j, y_k)\, p(x_j, y_k)$$

X og Y er uafhængige, hvis $p(x_j, y_k) = p_X(x_j)\, p_Y(y_k)$ for alle j og k.

Eksempel 3. Kast med to terninger. Lad X betegne det største antal øjne, der fremkommer, og lad Y betegne summen af antal øjne. Bemærk, af X kan antage værdierne $1, 2, \dots, 6$, og at Y kan antage værdierne $2, 3, \dots, 11, 12$. Vi udregner værdierne af den simultane sandsynlighedsfunktion:

$P(X=x, Y=y)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{1}{36}$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2	–	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	–	–	–	–	–	–	–	–
3	–	–	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	–	–	–	–	–	–
4	–	–	–	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	–	–	–	–
5	–	–	–	–	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	–	–
6	–	–	–	–	–	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Marginalfordelingen

for X:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

for Y:

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Y=y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Bemærk, at marginalfordelingerne fremkommer ved simpel addition af henholdsvis rækker og søjler i skemaet for den simultane sandsynlighedsfunktion.

Udregning af middelværdi og varians af henholdsvis X og Y:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= 1\frac{1}{36} + 2\frac{3}{36} + 3\frac{5}{36} + 4\frac{7}{36} + 5\frac{9}{36} + 6\frac{11}{36} = \frac{161}{36} \approx 4.4722 \\
\mathrm{E}[X^2] &= 1\frac{1}{36} + 4\frac{3}{36} + 9\frac{5}{36} + 16\frac{7}{36} + 25\frac{9}{36} + 36\frac{11}{36} = \frac{791}{36} \\
\mathrm{Var}(X) &= \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{28476 - 25921}{1296} = \frac{2555}{1296} \approx 1.9715
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y] &= 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + \cdots + 11\frac{2}{36} + 12\frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7 \\
\mathrm{E}[Y^2] &= 4\frac{1}{36} + 9\frac{2}{36} + \cdots + 121\frac{2}{36} + 144\frac{1}{36} = \frac{1974}{36} = \frac{329}{6} \\
\mathrm{Var}(Y) &= \frac{329}{6} - 7^2 = \frac{1974 - 1764}{36} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6} \approx 5.8333
\end{aligned}
$$

□

Kontinuerte fordelinger

Simultan fordelingsfunktion for en todimensional kontinuert variabel (X, Y):

$$F(x, y) = P(X \leq x,\, Y \leq y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Hvis der findes en stykkevis kontinuert funktion af to reelle variable, som opfylder

$$f(x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv = F(x,y)$$

så kaldes $f(x,y)$ den simultane tæthedsfunktion for (X,Y).

Marginale tætheder:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx \end{aligned}$$

X og Y er uafhængige, hvis tæthedsfunktionerne opfylder $f(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$.

Middelværdi af en afledt endimensional stokastisk variabel $g(X,Y)$:

$$\mathrm{E}[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\,f(x,y)\,dxdy$$

Eksempel 4. Lad den simultane tæthedsfunktion for (X,Y) være givet som

$$f(x,y) = 12x^2, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1-x$$

De marginale tætheder bliver

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{1-x} 12x^2 dy = 12x^2(1-x) = 12(x^2-x^3), \quad 0 \le x \le 1 \\ f_Y(y) &= \int_0^{1-y} 12x^2 dx = 12\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^{1-y} = 4(1-y)^3, \quad 0 \le y \le 1 \end{aligned}$$

Bemærk, at X og Y er afhængige.

Udregning af middelværdi og varians af henholdsvis X og Y:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \int_0^1 x\;12(x^2-x^3)dx = 12\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\Big]_0^1 = 12\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\Big) = \frac{3}{5} \\ \mathrm{E}[X^2] &= \int_0^1 x^2 12(x^2-x^3)dx = 12\Big[\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\Big]_0^1 = 12\Big(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\Big) = \frac{2}{5} \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{2}{5}-\Big(\frac{3}{5}\Big)^2 = \frac{10-9}{25} = \frac{1}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y] &= \int_0^1 y\;4(1-3y+3y^2-y^3)dy = 4\Big[\frac{y^2}{2}-3\frac{y^3}{3}+3\frac{y^4}{4}-\frac{y^5}{5}\Big]_0^1 \\ &= 4\Big(\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\Big) = 4\cdot\frac{1}{20} = \frac{1}{5} \\ \mathrm{E}[Y^2] &= \int_0^1 y^2 4(1-3y+3y^2-y^3)dy = 4\Big[\frac{y^3}{3}-3\frac{y^4}{4}+3\frac{y^5}{5}-\frac{y^6}{6}\Big]_0^1 \\ &= 4\Big(\frac{1}{3}-3\frac{1}{4}+3\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\Big) = \frac{1}{15} \\ \mathrm{Var}(Y) &= \frac{1}{15}-\Big(\frac{1}{5}\Big)^2 = \frac{5-3}{75} = \frac{2}{75} \end{aligned}$$

□

Kovarians og korrelation

Kovariansen mellem to stokastiske variable X og Y er defineret ved

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] = \sigma_{XY}$$

Bemærk, at

$$X, Y \text{ uafhængige} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$$

Når $\mathrm{Cov}(X,Y) > 0$, siges X og Y at være positivt korrelerede, og når $\mathrm{Cov}(X,Y) < 0$, siges X og Y at være negativt korrelerede. Når $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ er X og Y ukorrelerede.

Korrelationskoefficienten, eller blot korrelationen, er en dimensionsløs udgave af kovariansen:

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\,\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\,\sigma_Y}$$

Egenskaber ved korrelation:

$$-1 \le \rho(X,Y) \le 1$$
$$\rho(X,Y) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \alpha,\, \beta : \; Y = \alpha + \beta X$$

Eksempel 3 fortsat. Udregning af kovarians og korrelation:

$$\mathrm{E}[XY] = 1\cdot 2\cdot\frac{1}{36} + 2\cdot 3\cdot\frac{2}{36} + 2\cdot 4\cdot\frac{3}{36} + \cdots + 6\cdot 11\cdot\frac{2}{36} + 6\cdot 12\cdot\frac{1}{36} = \frac{1232}{36} = \frac{308}{9}$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{308}{9} - \frac{161}{36}\cdot 7 = \frac{1232-1127}{36} = \frac{105}{36} = \frac{35}{12} \approx 2.9167$$
$$\rho(X,Y) = \frac{\frac{35}{12}}{\sqrt{\frac{2555}{1296}}\sqrt{\frac{35}{6}}} = \frac{630}{\sqrt{2555}\sqrt{210}} \approx 0.8601$$

□

Eksempel 4 fortsat. Udregning af kovarians og korrelation:

$$\mathrm{E}[XY] = \int_0^1\int_0^{1-x} xy\,12x^2\,dydx = \int_0^1 12x^3\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{1-x}dx = 6\int_0^1 x^3(1-2x+x^2)dx$$
$$= 6\int_0^1 (x^3 - 2x^4 + x^5)dx = 6\Big[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}\Big]_0^1 = 6\Big(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\Big) = 6\frac{15-24+10}{60} = \frac{1}{10}$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{10} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{5-6}{50} = -\frac{1}{50}$$
$$\rho(X,Y) = \frac{-\frac{1}{50}}{\sqrt{\frac{1}{25}}\sqrt{\frac{2}{75}}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{4} \approx -0.6124$$

□

Regneregler

Regneregler for middelværdi

- $P(X=c) = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{E}[X] = c$
- $\mathrm{E}[aX + bY] = a\,\mathrm{E}[X] + b\,\mathrm{E}[Y]$

- $\mathrm{E}[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i \ \mathrm{E}[X_i]$
- $X_1 \leq X_2 \ \Rightarrow \ \mathrm{E}[X_1] \leq \mathrm{E}[X_2]$.
- $|\,\mathrm{E}[X]| \leq \mathrm{E}[|X|]$.

Regneregler for varians

- $P(X = c) = 1 \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Var}(X) = 0$.
- $\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2 \ \mathrm{Var}(X) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X, Y) + b^2 \ \mathrm{Var}(Y)$
- $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ \mathrm{Var}(X_i) + 2 \sum_{i<j} a_i a_j \,\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

Regneregler for kovarians

- X og Y uafhængige $\Rightarrow$ $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$
- $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$
- $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab \ \mathrm{Cov}(X, Y)$
- $\mathrm{Cov}(X + Y, Z) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z)$
- $\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$
- $\mathrm{Cov}(\sum_i a_i X_i, \sum_j b_j Y_j) = \sum_i \sum_j a_i b_j \,\mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$

Udregning af højere ordens momenter

- Det n'te moment for en stokastisk variabel:

$$\mathrm{E}[X^n] = \begin{cases} \sum_k x_k^n p(x_k) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx \end{cases}$$

- Det n'te centrale moment:

$$\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^n] = \begin{cases} \sum_k (x_k - \mu)^n p(x_k) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n f(x) dx \end{cases}$$

hvor $\mu = \mathrm{E}[X]$.

22.2.2012/BR