Konstruktion af de komplekse tal

Lad $R' \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ være givet ved $\forall a \in \mathbb{R}$: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in R'$. Bemærk, at

$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & 0 \\ 0 & a_1+a_2 \end{bmatrix}$, dvs. R' er lukket over for $+$, og at

$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & a_1a_2 \end{bmatrix}$, dvs. R' er lukket over for $\cdot$.

$\varphi\colon \mathbb{R} \to R'$, $\varphi(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, er en isomorfi af $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ på $(R', +, \cdot)$.

R' kaldes et eksemplar af de reelle tals legeme.

Lad $C' \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ være givet ved $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in C'$. Bemærk, at

$\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & -(b_1+b_2) \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix}$, dvs. C' er lukket over for $+$,

og at $\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -(a_1b_2 + a_2b_1) \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{bmatrix}$, dvs. C' er lukket over for $\cdot$.

$(C', +)$ er en kommutativ gruppe med neutralt element O (nulelement).
$(C' \setminus \{O\}, \cdot)$ er en kommutativ gruppe med neutralt element I (ételement).
Den distributive lov gælder, jf. sædvanlig matrixregning.
$(C', +, \cdot)$ er altså et tallegeme.

Da R' er en delmængde af C', kaldes tallegemet $(R', +, \cdot)$ et dellegeme af $(C', +, \cdot)$, og $(C', +, \cdot)$ et udvidelseslegeme til $(R', +, \cdot)$.
C' kaldes et eksemplar af de komplekse tals legeme.

Opgaven er nu at bestemme en mængde $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$ og en isomorfi ψ af $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ på $(C', +, \cdot)$.

Sæt $j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, og iagttag, at $j\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$, og at

$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

Hvis ψ eksisterer, så benævnes $\psi^{-1}(j) = i$.

Sæt $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ med kompositionerne $+$ og $\cdot$
defineret ved $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$
og $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$
samt konventionerne $a + i0 = a$, $0 + ib = ib$, $i1 = i$ og $i(-b) = -ib$.

Afbildningen $\psi\colon \mathbb{C} \to C'$, $\psi(a + ib) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, er den ønskede isomorfi af $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ på $(C', +, \cdot)$.

$\mathbb{C}$ kaldes mængden af de komplekse tal.

Bemærk, at $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, og at $\mathbb{C}$ er et udvidelseslegeme til $\mathbb{R}$.

Mængden $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ kaldes *de imaginære tal*, specielt kaldes $\{ib \mid b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ for *de rent imaginære tal*.

Bemærk, at $i^2 = i \cdot i = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1$.

Multiplikation af to komplekse tal svarer nøje til sædvanlig multiplikation af to toleddede størrelser, blot under iagttagelse af resultatet $i^2 = -1$.

Eksempler: $(3 + 7i)(-4 + i) = -12 + 3i - 28i + (-7) = -19 - 25i$

$(3 - 2i)^2 = 9 - 12i + (-4) = 5 - 12i$ □

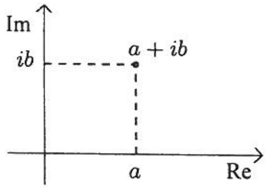
Regning med komplekse tal

$\mathbb{C}$ er mængden af de komplekse tal.

Lad $c \in \mathbb{C}$ $\quad c = a + ib$

$\operatorname{Re} c = a$ $\quad$ Realdelen af c
$\operatorname{Im} c = b$ $\quad$ Imaginærdelen af c

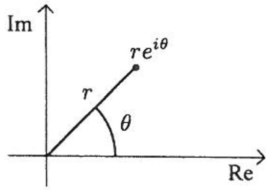
Bemærk, at $a, b \in \mathbb{R}$.



Den komplekse plan

Polær notation

$c = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$



Modulus af c:

$|c| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argumentet til c:

$\arg c = \theta$, hvor $(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, $\quad c \neq 0$

Bemærk, at argumentet *ikke* er entydigt.

Det argument, der ligger i intervallet $]-\pi;\pi]$, kaldes hovedargumentet og noteres $\operatorname{Arg} c$.

For $c = 0$ kan argumentet vælges arbitrært.

Regneregler

Lad $c_1 = a_1 + ib_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ og $c_2 = a_2 + ib_2 = r_2 e^{i\theta_2}$.

Identitet: $\quad c_1 = c_2 \Leftrightarrow \left[a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2\right]$

Addition: $\quad c_1 + c_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$

Multiplikation: $\quad c_1 c_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Division: $\quad \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

Potensopløftning: $\quad (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

De Moivres lov: $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Kompleks konjugering

Den kompleks konjugerede til $c = a + ib$ defineres som $\overline{c} = a - ib$.

Bemærk, at $c\,\overline{c} = |c|^2$, og dermed at $\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1\overline{c_2}}{|c_2|^2}$, dvs. nævneren i en brøk kan altid gøres reel.

Eksempel:

$$\frac{2+2i}{3-4i} = \frac{(2+2i)(3+4i)}{|3-4i|^2} = \frac{6+8i+6i-8}{3^2+(-4)^2} = \frac{-2+14i}{25} \qquad \square$$

Regneregler

$\overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$ $\qquad \overline{c_1 c_2} = \overline{c_1}\,\overline{c_2}$ $\qquad \overline{e^c} = e^{\overline{c}}$ $\quad (e^c = e^a e^{ib})$

Kompleks roduddragning

Kvadratrod

$c = a + ib = re^{i\theta} \ \wedge\ \theta \neq p2\pi,\ p \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$

$\sqrt{c} = \pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + i\,\operatorname{sgn}(b)\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right)$, $\quad \operatorname{sgn}(b) = \begin{cases} 1 & \text{for } b > 0 \\ -1 & \text{for } b < 0 \end{cases}$

(*ikke* entydig)

n'te rod

$c = a + ib = re^{i\theta} \quad \Leftrightarrow$

$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+p2\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+p2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+p2\pi}{n}\right)\right)$, $p = 0, \ldots, n-1$

(*ikke* entydig)

Kompleks andengradsligning

$c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = 0,\ c_2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2c_0}}{2c_2} = \begin{cases}\gamma_1 \\ \gamma_2\end{cases}$

Bemærk, at $\gamma_1 + \gamma_2 = -\frac{c_1}{c_2}$, og at $\gamma_1\gamma_2 = \frac{c_0}{c_2}$.

Eksempel:

$(1-i)z^2 - (1+i)z - 2 = 0$

$$d = (1+i)^2 - 4(1-i)(-2) = 1 + 2i - 1 + 8 - 8i = 8 - 6i$$

$$|d| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$\sqrt{d} = \pm\left(\sqrt{\frac{10+8}{2}} - i\sqrt{\frac{10-8}{2}}\right) = \pm(3 - i)$$

$$z = \frac{(1+i) \pm (3-i)}{2(1-i)} = \begin{cases} \dfrac{4(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \dfrac{4(1+i)}{4} = 1+i \\ \dfrac{(-2+2i)(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \dfrac{(-2-2i+2i-2)}{4} = -1 \end{cases}$$

Løsning: $z = -1 \ \vee \ z = 1+i$ □

Binom ligning

$z^n = c \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{c}$

Bemærk, at løsningerne ligger på en cirkel med centrum i origo og radius $\sqrt[n]{|c|}$. Vinklen mellem løsningerne er $\frac{2\pi}{n}$.

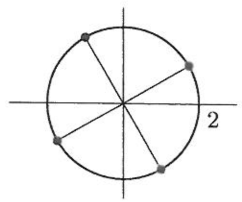
Eksempel 1:

$z^4 = -8 + 8i\sqrt{3} = 16\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$z = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + p2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + p2\pi}{4}\right)\right), \quad p = 0,1,2,3$$

$$= 2\left(\cos(\tfrac{\pi}{6} + p\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{6} + p\tfrac{\pi}{2})\right), \quad p = 0,1,2,3$$

$$= \begin{cases} \sqrt{3} + i \\ -1 + i\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} - i \\ 1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

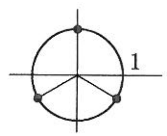


□

Eksempel 2:

$$z^3 = -i = e^{i(-\frac{\pi}{2})} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \frac{1}{3}(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{6} \\ -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

Grafisk løsning:



Det ses let, at

$$z = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ i \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases}$$

□

Komplekse funktioner

Den komplekse eksponentialfunktion

exp: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp z = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

Bemærk, at $e^z = e^{z+p2\pi i}$, $p \in \mathbb{Z}$, dvs. e^z er periodisk med perioden $2\pi i$.

$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad (e^z)^n = e^{nz}, \quad n \in \mathbb{Z}$

$(e^z)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{z + p2\pi i}{n}\right), \ p = 0, 1, \ldots, n-1, \ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ (*ikke* entydig)

Den komplekse logaritmefunktion

log: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\log z = \log\left(|z|\,e^{i\arg z}\right) = \ln|z| + i\arg z$

Bemærk, at $\arg z = \operatorname{Arg} z + p2\pi, \ -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi, \ p \in \mathbb{Z}$, dvs. logaritmefunktionen har uendelig mange grene.

$\log \circ \exp(z) = \log e^z = \ln e^x + i(y + p2\pi) = z + p2\pi i, \ \ p \in \mathbb{Z}$

$\exp \circ \log(z) = \exp(\ln|z| + i\arg z) = |z|\,e^{i\arg z} = z$

Eulers formler

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Eksempel på anvendelse af Eulers formler:

$$\begin{aligned} \cos x \sin^2 3x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{i6x} - 2 + e^{-i6x}\right) \\ &= -\frac{1}{8}\left(e^{i7x} - 2e^{ix} + e^{-i5x} + e^{i5x} - 2e^{-ix} + 2e^{-i7x}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i7x} + e^{-i7x}}{2} + \frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2} - 2\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\cos 7x - \frac{1}{4}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x \end{aligned}$$

□

Kompleks funktion af reel variabel

Betragt $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Bemærk, at $\varphi(t) = \operatorname{Re}\varphi(t) + i\operatorname{Im}\varphi(t) = f(t) + i\,g(t)$, hvor f og g er relle funktioner. φ differentieres ved at differentiere realdelen for sig og imaginærdelen for sig, dvs. $\varphi'(t) = f'(t) + i\,g'(t)$.

Eksempel:

$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \varphi(t) = e^{ct},\ c = a + ib \in \mathbb{C}$

$\varphi(t) = e^{at}\cos bt + i\,e^{at}\sin bt$

$$\begin{aligned}\frac{de^{ct}}{dt} &= a\,e^{at}\cos bt - e^{at}b\sin bt + i\big(a\,e^{at}\sin bt + e^{at}b\cos bt\big)\\ &= e^{at}\big(a\cos bt - b\sin bt + i(a\sin bt + b\cos bt)\big)\\ &= e^{at}(a+ib)(\cos bt + i\sin bt)\\ &= (a+ib)\big(e^{at}\cos bt + i\,e^{at}\sin bt\big)\\ &= c\,e^{ct}\end{aligned}$$

□

Algebraens fundamentalsætning

Et n'te grads polynomium $P(z)$ har netop n rødder, når multipliciteten af den enkelte rod medregnes. $P(z)$ kan faktoriseres i n førstegradsfaktorer.

$$\begin{aligned}P(z) &= c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0, \quad c_i \in \mathbb{C}\\ &= c_n(z-\gamma_1)^{p_1}(z-\gamma_2)^{p_2}\cdots(z-\gamma_k)^{p_k}, \quad \gamma_i \in \mathbb{C}, \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = n\end{aligned}$$

Identitet af polynomier

$P(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$

$Q(z) = d_n z^n + d_{n-1}z^{n-1} + \ldots + d_1 z + d_0$

$P = Q \ \Leftrightarrow\ [c_n = d_n \wedge c_{n-1} = d_{n-1} \wedge \cdots \wedge c_1 = d_1 \wedge c_0 = d_0]$

Polynomier med reelle koefficienter

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}$

For polynomier med reelle koefficienter gælder: Hvis γ er rod, så er $\overline{\gamma}$ også rod.

Polynomier med reelle koefficienter kan altid faktoriseres i reelle første- og andengradsfaktorer, idet

$\big(z - (\alpha + i\beta)\big)\big(z - (\alpha - i\beta)\big) = z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2$

Eksempel:

$$\begin{aligned}P(z) &= z^4 - 4z^3 + 8z - 32\\ &= (z+2)(z-4)\big(z-(1+i\sqrt{3})\big)\big(z-(1-i\sqrt{3})\big)\\ &= (z+2)(z-4)(z^2-2z+4)\end{aligned}$$

□