Eksamen i komplekse funktioner

Tirsdag den 17. januar 2012 kl. 13-17

Benyttelse af alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt. Brug af enhver form for elektronisk kommunikationsudstyr er ikke tilladt.

Opgave 1

a. Vis, at funktionen $u(x, y) = \sin x \cosh y$ er harmonisk.

b. Bestem en harmonisk konjugeret til $u(x, y)$, og angiv den korresponderende analytiske funktion.

Opgave 2 Udregn kurveintegralet af $\operatorname{Re} z$ langs den rette linie mellem punkterne $z = 0$ og $z = 1 + 2i$.

Opgave 3 Lad $f(z)$ være givet ved

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}$$

Angiv Laurentrækken for $f(z)$ i området $1 < |z| < \infty$.
(Vink: Omskriv $f(z)$ til $-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$.)

Opgave 4 Lad C være cirklen $|z| = 5$ med positiv omløbsretning. Udregn

$$\int_C \frac{\sin z}{2z - 3\pi} dz$$

ved benyttelse af Cauchys integralformel.

Opgave 5 Betragt funktionen

$$f(z) = \frac{z + 1}{(z^2 + 1)(z^4 - 1)}.$$

a. Bestem de singulære punkter og angiv deres type (hævelig singularitet, pol med angivelser af orden, væsentlig singularitet).

b. Udregn $\int_C f(z)dz$, hvor C er cirklen $|z| = 2$ med positiv omløbsretning.

VEND

Opgave 6 Udregn integralet

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2} dx.$$

Opgave 7 Betragt afbildningen $w = \frac{1}{z}$.

a. Angiv billedet af cirklen $|z - a| = a$, $a > 0$.

b. Skitser, hvorledes de enkelte kvartcirkler afbildes.

c. Skitser billedet af området $|z - a| > a$.