

# Matematik 4

## Komplekse funktioner

Skriftlig eksamen  
27. juni 2012

Dato: 27. juni 2012

Tidspunkt: Kl. 08:30–12:30

Sted: Lokale G5-112

**Tilladte hjælpemidler:** Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

**Bemærk:** Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

**Eksamenssættet:** Findes på de næste 2 (to) sider.

**Opgave 1.** Lad  $\Gamma$  betegne den vej, der består af randen af rektanglet med hjørner

$$\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$$

gennemløbet én gang i positiv omløbsretning.

1. Skitsér vejen i den komplekse plan.

2. Beregn integralet

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz.$$

3. Beregn integralet

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2} dz.$$

**Opgave 2.** Vis ved hjælp af residueregning, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 8} dx = \frac{\pi}{2}.$$

**Opgave 3.** Vi definerer funktionen

$$f(z) = \frac{1}{1+z}, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \{-1\}.$$

1. Gør rede for, at  $f(z)$  er analytisk på  $\mathbf{C} \setminus \{-1\}$ .

2. Bestem potensrækkeudviklingen for  $f(z)$  med udviklingspunkt  $z_0 = -1 + 2i$ . Angiv konvergensradius for denne potensrække.

3. Vi definerer

$$g(z) = \frac{1}{(1+z)^2}, \quad z \in \mathbf{C} \setminus \{-1\}.$$

Bestem potensrækkeudviklingen for  $g(z)$  med udviklingspunkt  $z_0 = -1 + 2i$ . Angiv konvergensradius for denne potensrække.

4. Bestem Laurentrækkeudviklingen for funktionen  $f(z)$  på ringområdet  $\{z \mid 0 < |z + 1| < \infty\}$ .

**Opgave 4.** Vi definerer funktionen

$$h(z) = \frac{(z^2 - 9)^2}{z^3 + 27}.$$

1. Gør rede for, at  $h(z)$  er en meromorf funktion på  $\mathbf{C}$ .
2. Vis, at  $z = -3$  er en hævelig singularitet for  $h(z)$ .
3. Bestem nulpunkterne for  $h(z)$  og deres multiplicitet.
4. Bestem polerne for  $h(z)$ , deres orden, og residuet i hver pol.
5. Lad  $\gamma$  betegne den vej, der består af cirklen  $|z| = 4$  gennemløbet én gang i positiv omløbsretning. Beregn integralet

$$\int_{\gamma} h(z) dz.$$

6. Lad  $\gamma$  være samme vej som i foregående spørgsmål. Beregn integralet

$$\int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz.$$