

# Matematik 4

## Komplekse funktioner

Skriftlig eksamen  
31. maj 2013

Dato: 31. maj 2013

Tidspunkt: Kl. 08:30–12:30

Sted: Lokale G5-112

**Tilladte hjælpemidler:** Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon osv.), musikafspillere osv.

**Bemærk:** Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

**Eksamenssættet:** Findes på de næste 2 (to) sider.

**Opgave 1.** En vej i den komplekse plan er givet ved

$$\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right].$$

1. Skitsér vejen i den komplekse plan.
2. Vis, at

$$\int_{\gamma} (z - 1) dz = (\sqrt{2} - 1)i.$$

3. Bestem

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz.$$

**Opgave 2.** Vis ved at bruge residueregning, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 - i} dx = \frac{2\pi i}{3}.$$

Brug dette resultat til at vise, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx = \frac{2\pi}{3}.$$

**Opgave 3.** Der er givet en funktion  $f(z)$  ved

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z}.$$

1. Gør rede for, at  $f(z)$  er en meromorf funktion. Bestem poler og nulpunkter for  $f(z)$ .
2. Lad  $\Gamma$  betegne den vej, der består af randen af kvadratet med hjørnerne  $1$ ,  $i$ ,  $-1$ , og  $-i$ , gennemløbet én gang i positiv omløbsretning. Skitsér vejen i den komplekse plan. Vis, at

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = -\pi i.$$

3. Bestem potensrækkeudviklingen af  $f(z)$  med udviklingspunkt  $z_0 = 1$ . Angiv konvergensradius for denne potensrække.
4. Bestem Laurentrækkeudviklingen for  $f(z)$  i ringområdet  $\{z \mid 0 < |z - 2| < 2\}$ .

**Opgave 4.** Der er givet en funktion  $g(z)$  ved

$$g(z) = \frac{\sin(z) + \sin(2z)}{z^3 - 2z}.$$

1. Gør rede for, at  $g(z)$  er en meromorf funktion.
2. Vis at  $z = 0$  er en hævelig singularitet for  $g(z)$ .
3. Bestem polerne for  $g(z)$  og residuet i hver af de fundne poler.
4. Bestem nulpunkterne for  $g(z)$ . (*Hint:*  $\sin(2z) = 2 \cos(z) \sin(z)$ .) Angiv orden af hver af de fundne nulpunkter.
5. Lad  $\partial B(0, 6)$  betegne den vej, der består af cirklen med centrum i 0 og radius 6, gennemløbet én gang i positiv omløbsretning. Bestem

$$\int_{\partial B(0,6)} \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$