

Matematik 4

Komplekse funktioner

Skriftlig re-eksamen
19. august 2013

Dato: 19. august 2013

Tidspunkt: Kl. 08:30–12:30

Sted: Lokale G5-109

Tilladte hjælpemidler: Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt (lærebøger, notater, osv.), med undtagelse af elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Eksamenssættet: Findes på de næste 2 (to) sider.

Opgave 1. Lad γ betegne den vej, der består af liniestykket fra $\sqrt{3} + i$ til $-\sqrt{3} + i$, gennembløbet med begyndelsespunkt $\sqrt{3} + i$ og endepunkt $-\sqrt{3} + i$.

1. Skitsér vejen i den komplekse plan.

2. Vis, at

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{2\pi i}{3}.$$

3. Vis, at

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Opgave 2. Vis ved hjælp af residueregning, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 + 9} dx = \frac{\pi e^{-6}}{3}.$$

Opgave 3. Vi definerer funktionen

$$h(z) = \frac{\cos(z) + \cos(2z)}{z(z - \pi)}.$$

1. Gør rede for, at $h(z)$ er en meromorf funktion på $\mathbf{C}$.

2. Vis, at $z = \pi$ er en hævelig singularitet for $h(z)$.

3. Bestem polerne for $h(z)$, deres orden, og residuet i hver pol.

4. Lad γ betegne den vej, der består af cirklen $|z| = 4$ gennembløbet én gang i positiv omløbsretning. Beregn integralet

$$\int_{\gamma} h(z) dz.$$

5. Bestem nulpunkterne for $h(z)$ og deres multiplicitet.

Hint: Vi har, at $\cos(2z) = 2\cos^2(z) - 1$.

Opgave 4. Vi definerer funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 4}$$

1. Gør rede for, at $f(z)$ er analytisk på $\mathbf{C} \setminus \{-2i, 2i\}$, og at $f(z)$ har simple poler i $-2i$ og $2i$.
2. Bestem potensrækkeudviklingen for $f(z)$ med udviklingspunkt $z_0 = 0$. Bestem konvergensradius for denne potensrække.
3. Vis, at

$$f(z) = \frac{1}{4i} \frac{1}{z - 2i} - \frac{1}{4i} \frac{1}{z + 2i}.$$

4. Bestem Laurenttrækkeudviklingen for $f(z)$ på ringområdet $\{z \mid 0 < |z + 2i| < 4\}$.
5. Vis, at der gælder

$$\frac{1}{(z^2 + 4)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+2}} (n+1) z^{2n}$$

for $|z| < 2$.