Eksamen i komplekse funktioner

Fredag den 17. januar 2014 kl. 9 - 13

Benyttelse af alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater, m.v.) er tilladt. Enhver form for elektronisk kommunikationsudstyr må ikke benyttes.

Opgave 1

a. Vis, at funktionen $u(x, y) = e^{-y} \cos x$ er harmonisk.

b. Bestem en harmonisk konjugeret $v(x, y)$ til $u(x, y)$, og angiv den korresponderende analytiske funktion $f(z)$.

c. Undersøg om funktionen $g(z) = v(x, y) + iu(x, y)$ er analytisk.

d. Hvilken simpel faktor k skal multipliceres på $u(x, y)$, for at funktionen $h(z) = v(x, y) + iku(x, y)$ bliver analytisk?

Opgave 2 Betragt afbildningen $w = \dfrac{1}{z}$.

a. Angiv billedet af den rette linie $\operatorname{Im} z = -a$, $a > 0$, og skitser billedet i w-planen.

b. Skitser billedet af $\{z \,|\, y < -a\}$.

Opgave 3

a. Betragt en vej γ bestående af de orienterede liniestykker, der forbinder punkterne 1, $1 + i$, $-1 + i$ og -1 i nævnte rækkefølge. Skitser γ.

b. Udregn kurveintegralet af funktionen $\cos z$ langs γ.

c. Vejen Γ fremkommer ved til γ at tilføje det orienterede liniestykke fra punktet -1 til punktet 1. Udregn integralerne

   i. $\displaystyle\int_\Gamma \cos z dz,$

   ii. $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\cos z}{2z + i} dz,$

   iii. $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\cos z}{2z - i} dz.$

VEND

Opgave 4 Betragt funktionen

$$f(z) = \frac{z+3}{(z-1)(z^2+7z+12)}.$$

a. Vis at $f(z)$ har en hævelig singularitet, og angiv det reducerede funktionsudtryk $g(z)$.

b. Udled Laurentrækken for $g(z)$ i det ringformede område $1 < |z| < 4$.

(Vink: Begynd med at dekomponere $g(z)$.)

Opgave 5 Vis ved benyttelse af residueregning, at

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{7+6\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{13}}.$$

Opgave 6

a. Vis, at funktionen

$$\frac{1}{z^4+z^2+1}$$

har simple poler i $z = \pm e^{i\frac{\pi}{3}}$ og $z = \pm e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b. Vis, at

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$