Uddrag af:

Kompendium

i komplekse tal og differentialligninger

Definitioner, formler og eksempler

Det ingeniør-, natur- og sundhedsvidenskabelige basisår på Aalborg Universitet

Udarbejdet af
Henrik Vie Christensen
og
Bo Rosbjerg

I dette kompendium er ikke medtaget almindeligt benyttede formler fra gymnasiepensummet. Der henvises til "Matematisk Formelsamling STX A".

Komplekse tal

Sæt $\mathbb{C} = \{a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ med kompositionerne $+$ og $\cdot$
defineret ved $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$
og $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$
samt konventionerne $a + i0 = a$, $0 + ib = ib$, $i1 = i$ og $i(-b) = -ib$.

$\mathbb{C}$ kaldes mængden af de komplekse tal.

Bemærk, at $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, og at $\mathbb{C}$ er et udvidelseslegeme til $\mathbb{R}$.

Mængden $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ kaldes *de imaginære tal*, specielt kaldes $\{ib \,|\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ for *de rent imaginære tal*.

Bemærk, at $i^2 = i \cdot i = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1$.

Multiplikation af to komplekse tal svarer nøje til sædvanlig multiplikation af to toleddede størrelser, blot under iagttagelse af resultatet $i^2 = -1$.

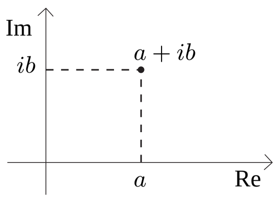
Eksempler: $(3 + 7i)(-4 + i) = -12 + 3i - 28i + (-7) = -19 - 25i$

$$(3 - 2i)^2 = 9 - 12i + (-4) = 5 - 12i$$

□

Regning med komplekse tal

$\mathbb{C}$ er mængden af de komplekse tal.



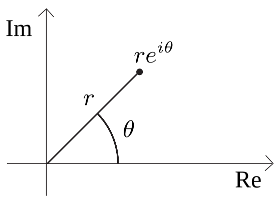
Den komplekse plan

Lad $c \in \mathbb{C}$ $\quad c = a + ib$

$\operatorname{Re} c = a$ $\quad$ Realdelen af c
$\operatorname{Im} c = b$ $\quad$ Imaginærdelen af c

Bemærk, at $a, b \in \mathbb{R}$.

Polær notation



$c = re^{i\theta} = r\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)$

Modulus af c:

$|c| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argumentet til c:

$\arg c = \theta,$ hvor $\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \quad c \neq 0$

Bemærk, at argumentet *ikke* er entydigt.

Det argument, der ligger i intervallet $]-\pi;\pi]$, kaldes hovedargumentet og noteres $\operatorname{Arg} c$.

For $c = 0$ kan argumentet vælges arbitrært.

Regneregler

Lad $c_1 = a_1 + ib_1 = r_1e^{i\theta_1}$ og $c_2 = a_2 + ib_2 = r_2e^{i\theta_2}$.

Identitet: $\quad c_1 = c_2 \;\Leftrightarrow\; \big[\,a_1 = a_2 \;\wedge\; b_1 = b_2\,\big]$

Addition: $\quad c_1 + c_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$

Multiplikation: $\quad c_1c_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

$$r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2\,e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Division: $\quad \dfrac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}\,e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

Potensopløftning: $\quad (re^{i\theta})^n = r^ne^{in\theta}$

De Moivres lov: $\quad \big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Kompleks konjugering

Den kompleks konjugerede til $c = a + ib$ defineres som $\overline{c} = a - ib$.

Bemærk, at $c\,\overline{c} = |c|^2$, og dermed at $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{c_1\overline{c_2}}{|c_2|^2}$, dvs. nævneren i en brøk kan altid gøres reel.

Eksempel:

$$\frac{2+2i}{3-4i} = \frac{(2+2i)(3+4i)}{|3-4i|^2} = \frac{6+8i+6i-8}{3^2+(-4)^2} = \frac{-2+14i}{25} \qquad \square$$

Regneregler

$\overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2} \qquad \overline{c_1c_2} = \overline{c_1}\;\overline{c_2} \qquad \overline{e^{c}} = e^{\overline{c}} \quad (e^c = e^ae^{ib})$

Kompleks roduddragning

Kvadratrod

$c = a + ib = re^{i\theta} \;\wedge\; \theta \neq p2\pi,\; p \in \mathbf{Z} \quad \Leftrightarrow$

$$\sqrt{c} = \pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + i\,\operatorname{sgn}(b)\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right), \quad \operatorname{sgn}(b) = \begin{cases} 1 & \text{for } b > 0 \\ -1 & \text{for } b < 0 \end{cases}$$

(*ikke* entydig)

n'te rod

$c = a + ib = re^{i\theta} \quad \Leftrightarrow$

$$\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+p2\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+p2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+p2\pi}{n}\right)\right),\; p = 0, \ldots, n-1$$

(*ikke* entydig)

Kompleks andengradsligning

$c_2z^2 + c_1z + c_0 = 0$

Rødderne findes efter samme formel som ved sædvanlig andengradsligning.

Eksempel:

$(1-i)z^2 - (1+i)z - 2 = 0$

$$d = (1+i)^2 - 4(1-i)(-2) = 1 + 2i - 1 + 8 - 8i = 8 - 6i$$

$$|d| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$\sqrt{d} = \pm\left(\sqrt{\frac{10+8}{2}} - i\sqrt{\frac{10-8}{2}}\right) = \pm\,(3 - i)$$

$$z = \frac{(1+i) \pm (3-i)}{2(1-i)} = \begin{cases} \dfrac{4(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \dfrac{4(1+i)}{4} = 1+i \\ \dfrac{(-2+2i)(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \dfrac{(-2-2i+2i-2)}{4} = -1 \end{cases}$$

Løsning: $z = -1 \ \vee \ z = 1+i$ □

Binom ligning

$z^n = c \ \Leftrightarrow \ z = \sqrt[n]{c}$

Bemærk, at løsningerne ligger på en cirkel med centrum i origo og radius $\sqrt[n]{|c|}$. Vinklen mellem løsningerne er $\frac{2\pi}{n}$.

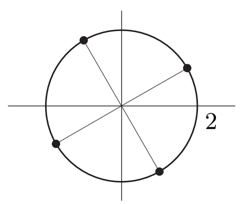
Eksempel 1:

$$z^4 = -8 + 8\,i\sqrt{3} = 16\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z \ = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + p2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + p2\pi}{4}\right)\right), \quad p = 0,1,2,3$$

$$= 2\left(\cos(\tfrac{\pi}{6} + p\tfrac{\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{6} + p\tfrac{\pi}{2})\right), \quad p = 0,1,2,3$$

$$= \begin{cases} \sqrt{3} + i \\ -1 + i\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} - i \\ 1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

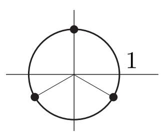


□

Eksempel 2:

$$z^3 = -i = e^{i(-\frac{\pi}{2})} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[3]{1} = 1 \\ \text{Arg}\, z = \begin{cases} \frac{1}{3}(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{6} \\ -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

Grafisk løsning:



Det ses let, at

$$z = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ i \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases}$$

□