Opgaver i calculus med diverse vink

Afsnit 10.2

1 Udnyt komponentvis konvergens.

3 Udnyt komponentvis konvergens samt regneregler for konvergens.

6 Udnyt opgave 1.

Afsnit 10.3

1 Facit:

- a Åben.
- b Hverken åben eller lukket.
- c Åben.
- d Lukket.
- e Lukket.

2 Facit:

- a Åben.
- b Lukket.
- c Hverken åben eller lukket.
- d Lukket.

12 Den danske betegnelse for ’closure of A’ er ’afslutningen af A’.

Afsnit 11.1

3 Udnyt komponentvis kontinuitet samt regneregler for kontinuerte funktioner.

5 a -
 b -
 c -
 d Benyt endvidere sætning 10.18(i)

6 Bemærk, at $\{\mathbf{u} \mid f(\mathbf{u}) \geq 0\}$ og $\{\mathbf{u} \mid f(\mathbf{u}) \leq 0\}$ begge er lukkede. Tilsvarende for funktionen g. Benyt sætning 10.17(ii).

8 Bemærk, at $\{\mathbf{u} \mid u_n > 0\} = p_n^{-1}(R_+)$, hvor p_n er den n'te projektionsfunktion. Benyt sætning 11.12(ii).

Afsnit 11.2

1 Facit:
 a Ikke følgekompakt (ikke lukket)
 b Ikke følgekompakt (hverken lukket eller begrænset)
 c Ikke følgekompakt (ikke begrænset)

2 Vis, at $\{\mathbf{v} \in R^n \mid \text{dist}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \leq r\}$ er
 - begrænset ($|\mathbf{v}| = |\mathbf{v} - \mathbf{u} + \mathbf{u}| \leq |\mathbf{v} - \mathbf{u}| + |\mathbf{u}| = r + |\mathbf{u}|$, de lodrette streger omkring vektorerne burde være dobbeltstreger),
 - lukket (korollar 11.13).

4 Facit: Nej. (Giv begrundelse.)

6 Facit:
 a Ikke nødvendigvis. (Giv modeksempel.)
 b Ikke nødvendigvis. (Giv modeksempel.)

Afsnit 13.1

1 Del op i tilfældene $x = 0$ og $x \neq 0$.

2 Facit:

a 1

b 0

3 a Indsæt fx $(x, y) = (1/k, 0)$, og lad $k \to \infty$.

Facit: Ingen grænseværdi.

b Indsæt fx $(x, y, z) = (1/k, 0, 0)$, og lad $k \to \infty$.

Facit: Ingen grænseværdi.

c Sæt $x^2 + y^2 = t$, og bemærk, at $e^0 = 1$. Udnyt kendskabet til den afledede af e^t.

Facit: 1

10 i Bemærk, at $1/|\mathbf{x}|^m = |\mathbf{x}|1/|\mathbf{x}|^{m+1}$.

ii Vælg fx $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{m+1}$ som modeksempel.

(De lodrette streger om **x** burde være dobbeltstreger.)

Afsnit 13.2

2 Find de partielle afledede, og benyt regneregler for kontinuerte funktioner.

3 Indsæt fx $(x, y) = (0, 1/k)$ i $\partial f/\partial x$ og $(x, y) = (1/k, 0)$ i $\partial f/\partial y$.

7 Sæt $h(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i)$, i = 1, …, n, og bemærk, at $h'(t) = (\partial f/\partial x_i)(\mathbf{x})$.
Opstil differenskvotienten $(g \circ h(t) - g \circ h(0))/t$, og lad $t \to 0$. Husk formlen for differentiation af en sammensat funktion.

8 Facit:

a $\partial h/\partial x = y^2 g'(xy^2 + 1)$, $\partial h/\partial y = 2xyg'(xy^2 + 1)$

b $\partial h/\partial u = 4g'(4u + 7v)$, $\partial h/\partial v = 7g'(4u + 7v)$

c $\partial h/\partial t = g'(t - s)$, $\partial h/\partial s = - g'(t - s)$

11 Facit:

a Harmonisk.

b Harmonisk.

c Ikke harmonisk.

Afsnit 13.3

1 Facit:

a $2\exp(|\mathbf{x}|^2)\,\mathbf{x}$ (De lodrette streger om **x** burde være dobbeltstreger.)

b $(x^2 + y^2 + 1)^{-1/2}(y\cos(xy) - x\sin(xy)/(x^2 + y^2 + 1),$

$x\cos(xy) - y\sin(xy)/(x^2 + y^2 + 1))$

c $-2\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^4$ (De lodrette streger om **x** burde være dobbeltstreger.)

3 Benyt resultatet i opgave 13.2 7 på de enkelte partielle afledede.

Facit: $\nabla(g\circ f)(\mathbf{x}) = (g'\circ f)(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})$

6 Mellemresultat: $3\theta^2 + 4\theta - 3 = 0$ (ved indsættelse i middelværdisætningen)

Facit: $\theta = (-2 + \sqrt{(13)})/3$

7 Integration giver $f(x,y) = 2x + g(y)$ og $f(x,y) = 3y + h(x)$. Benyt $f(0,0) = 1$ til at bestemme $g(y)$ og $h(x)$.

9 a Indsæt fx $(x, y) = (1/k, 1/k^2)$, og lad $k \to \infty$.

b Benyt definitionen på den retningsafledede efter $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$.

Betragt tilfældene $p_2 \neq 0$ og $p_2 = 0$ hver for sig.

Facit: $(\partial f/\partial \mathbf{p})(\mathbf{0}) = (p_1/|p_2|)\sqrt{(p_1^2 + p_2^2)}$, når $p_2 \neq 0$.

$(\partial f/\partial \mathbf{p})(\mathbf{0}) = 0$, når $p_2 = 0$.

c Facit: Vælg $\mathbf{p} = (c^2 + 1)^{-1/2}(c, 1)$, når $c \neq 0$.

Vælg $\mathbf{p} = (1, 0)$, når $c = 0$.

d Bemærk, at $f \notin C^0$.

Afsnit 14.1

1 Facit: $z = e + 2ex + 4ey$

2 Løs ligningssystemet $\partial f/\partial x = 0$ og $\partial f/\partial y = 0$, indsæt i $f(x,y)$.

Facit: P = (-4/7, -1/7, -2/7)

3 Betragt fx $f(x,y) = c\sqrt{(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)}$, $P = (x_0, y_0, z_0)$
Mellemresultater: $(\partial f/\partial x)(x_0, y_0) = - c^2x_0/a^2z_0$, $(\partial f/\partial y)(x_0, y_0) = - c^2y_0/b^2z_0$
Facit: $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 + zz_0/c^2 = 1$

4 Den søgte affine funktion: $g(\mathbf{u}) = g(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{u} - \mathbf{x}_0)$
Facit: $g(u_1, u_2) = 2u_2$

5 Facit: $g(u_1, u_2) = 1 + u_1 - u_2$

6 Facit: $g(u_1, u_2, u_3) = u_3$

8 Mellemresultater: $(\partial f/\partial x)(0, 0) = g(0, 0)$, $(\partial f/\partial y)(0, 0) = h(0, 0)$
Facit: $\varphi(u_1, u_2) = g(0, 0)u_1 + h(0, 0)u_2$

10 Vis, at $f(x,y) + \langle\nabla f(0, 0), (x,y)\rangle = 0$. Benyt derefter første ordens approksimationssætningen.

11 Vis, at $f(x,y) + \langle\nabla f(0, 0), (x,y)\rangle = 2x + 2y$. Benyt derefter første ordens approksimationssætningen.

12 Vis, at $f(x,y) + \langle\nabla f(0, 0), (x,y)\rangle = 1 + 3x$. Benyt derefter første ordens approksimationssætningen.

Afsnit 14.2

1 a Mellemresultat: $\varphi''(t) = 12(1 + 12t^2)\exp(6t^2) + 32$
b Mellemresultat: $H(0, 0) = [2, 3; 3, 0]$
(Matlab skrivemåde for matrix, dvs. rækkevis)
Bemærk, at $\varphi(t) = f((0, 0) + t(2, 3))$.

2 a Facit: $\varphi''(0) = 3$
b Mellemresultat: $H(0, 1, 0) = [0, 0, 1/2; 0, 0, 0; 1/2, 0, 0]$
(Matlab skrivemåde for matrix, dvs. rækkevis)
Bemærk, at $\varphi(t) = g((0, 1, 0) + t(3, -1, 1))$.

7 Facit:

a [1, 0; 0, -1] (Matlab skrivemåde for matrix, dvs. rækkevis)

b [1, 4; 4, 1] (Matlab skrivemåde for matrix, dvs. rækkevis)

8 Sæt $A^T = [\mathbf{u}\ \ \mathbf{0}\ \ \ldots\ \ \mathbf{0}]$.

9 Facit: [1, 3/2, 0; 3/2, -1, 1/2; 0, 1/2, -1]
(Matlab skrivemåde for matrix, dvs. rækkevis)

Afsnit 14.3

1 Facit:

a f har minimum i $(0, 2)$, $f(0, 2) = e^{-4}$.

b g har minimum i $(0, 2, 0)$, $f(0, 2, 0) = e^{-4}$.

c f har minimum i $(0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

d $f(x, 0) = 0$ for $x \in R$, $f(0, y) = 0$ for $y \in R$,
f har lokalt maksimum i $(3, 2)$, $f(3, 2) = 108$.

3 Mellemresultater:

Kritiske punkter i int K: $(x, y) = (0, \pm\pi/2)$.

Randundersøgelse, jf. eksempel i kompendium i calculus side 16, udpeger punkterne $(\pm 1, 0)$ og $(1, \pm\pi)$.

Facit: f har minimum i $(-1, 0)$, $f(-1, 0) = -e$,
f har maksimum i $(1, 0)$, $f(1, 0) = e^{-1}$.

4 Facit: f har minimum i $(-1, 1)$, $f(-1, 1) = 3$.

5 Facit: f har sadelpunkt i $(0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

11 a Sæt $f(x,y) = \sin(x + xy - y)$.

Mellemresultat: $\langle \nabla f(0, 0), (x, y)\rangle = x - y = x + y - 2y$

Undersøg, om $2y/\sqrt{(x^2 + y^2)}$ har en grænseværdi for $(x, y) \to (0, 0)$.

Facit: Det givne udtryk har ingen grænseværdi for $(x, y) \to (0, 0)$.

b Sæt $f(s, t) = s^2 t$.

Mellemresultat: $\langle \nabla f(0, 0), (x, y)\rangle = 0$.

Facit: $(s^2t-(0+0))/\sqrt{(s^2+t^2)} \to 0$ for $(s, t) \to (0, 0)$.

c Sæt $f(x,y) = e^{x-y}$.

Mellemresultater: $\langle \nabla f(0, 0), (x, y)\rangle = x - y$

$\langle H(0, 0)\,(x, y), (x, y)\rangle = (x-y)^2$

Undersøg, om $(x-y)^2/2(x^2+y^2)$ har en grænseværdi for $(x, y) \to (0,0)$.

Facit: Det givne udtryk har ingen grænseværdi for $(x, y) \to (0, 0)$.

d Sæt $f(x,y) = \cos(x - y + xy)$.

Mellemresultater: $\langle \nabla f(0, 0), (x, y)\rangle = 0$

$\langle H(0, 0)\,(x, y), (x, y)\rangle = -(x-y)^2$

Facit: $(\cos(x-y+xy) - (1 + 0 - (x-y)^2/2))/(\sqrt{(x^2+y^2)})^2 \to 0$ for $(x, y) \to (0, 0)$

Afsnit 15.2

1 Facit: $DF(0, 0) = [2, 0; 1,-1]$, $DF(0, 0) = [2, \pi; -1, 1]$
(Matlab skrivemåde for matricer, dvs. rækkevis)

2 Facit: $DF(1, 2, 3) = [6, 3, 2; 2, 3, 2; 3, 0, 0]$
$DF(0, 1, 0) = [0, 0, 0; 0, 1, 0; 3, 0, 0]$
$DF(-1, 4, 0) = [0, 0, -4; -2, 0, 4; 3, 0, 0]$
(Matlab skrivemåde for matricer, dvs. rækkevis)

4 Vis, at $\partial F_i/\partial x_j = a_{ij}$.

6 Mellemresultat: $J(x_0, y_0) = 4(x_0^{\,2} + y_0^{\,2})$ (Jacibideterminanten)

a Facit: Alle $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

b Bemærk, at $dF(x_0, y_0) = DF(x_0, y_0)\mathbf{h}$.
Facit: Alle $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

9 a Udregn $(\partial f/\partial x)(x_0, y_0)$ og $(\partial f/\partial y)(x_0, y_0)$, og omform til det ønskede udtryk.

b Husk, at en nødvendig betingelse for minimum i (x_0, y_0) er, at $(\partial f/\partial x)(x_0, y_0) = 0$ og $(\partial f/\partial y)(x_0, y_0) = 0$.

Afsnit 15.3

1 Facit: $(\partial g/\partial s)(s, t) = D_1\psi(s^2t, s)2st + D_2\psi(s^2t, s)$, $(\partial g/\partial t)(s, t) = D_1\psi(s^2t, s)s^2$

2 Facit:

$$D_1\eta(u, v, w) = 3h(u^2, v^2, uvw) + (3u + 2v)(D_1h(u^2, v^2, uvw)2u + D_3h(u^2, v^2, uvw)vw)$$

$$D_2\eta(u, v, w) = 2h(u^2, v^2, uvw) + (3u + 2v)(D_2h(u^2, v^2, uvw)2v + D_3h(u^2, v^2, uvw)uw)$$

$$D_3\eta(u, v, w) = (3u + 2v)D_3h(u^2, v^2, uvw)uv$$

4 Supplerende mellemresultater:

$$(\partial v/\partial x)(x, y) = (\partial u/\partial x)(x^2 - y^2, 2xy)(-2y) + (\partial u/\partial y)(x^2 - y^2, 2xy)2x$$

$$(\partial^2 v/\partial x^2)(x, y) = (\partial^2 u/\partial x^2)(x^2 - y^2, 2xy)4y^2 + (\partial u/\partial x)(x^2 - y^2, 2xy)(-2) + (\partial^2 u/\partial x\partial y)(x^2 - y^2, 2xy)(-8xy) + (\partial^2 u/\partial y^2)(x^2 - y^2, 2xy)4x^2$$

6 Mellemresultater ($v(x, y) = w\circ F(x, y)$, $F = (F_1, F_2)$)

a $(\partial F_1/\partial x)(x, y) = (\partial F_2/\partial y)(x, y) = e^x\cos y$

$(\partial F_1/\partial y)(x, y) = -(\partial F_2/\partial x)(x, y) = -e^x\sin y$

b $(\partial F_1/\partial x)(x, y) = (\partial F_2/\partial y)(x, y) = 2x$

$(\partial F_1/\partial y)(x, y) = -(\partial F_2/\partial x)(x, y) = -2y$

c $(\partial F_1/\partial x)(x, y) = (\partial F_2/\partial y)(x, y) = -(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$

$(\partial F_1/\partial y)(x, y) = -(\partial F_2/\partial x)(x, y) = -2xy/(x^2 + y^2)^2$

7 Mellemresultat:

$$(\partial^2 v/\partial x^2)(x, y) + (\partial^2 v/\partial y^2)(x, y) = (a^2 + b^2)\, D_{11}u(ax + by, cx + dy) + (ac + bd)D_{12}u(ax + by, cx + dy) + (a^2 + b^2)\, D_{22}u(ax + by, cx + dy)$$

9 Mellemresultat: $(\partial^2 u/\partial x^2)(x, y, z) = 3x^2/|\mathbf{p}|^5 - 1/|\mathbf{p}|^3$

(De lodrette streger om **p** burde være dobbeltstreger.)