

Opgaver i lineær algebra med diverse vink

Kapitel 1

- 5 a Et homogent ligningssystem (1 ligning med 3 ubekendte).
 - b Et inhomogent ligningssystem.
 - c Er mængden lukket over for skalarmultiplikation?
 - d Et homogent ligningssystem.
- 6 Overvej noget med hele tal.
- 13 Giv et simpelt modeksempel.
- 15 Giv et simpelt modeksempel.

Kapitel 2

- 1 Vis, at
- $$r_1(v_1 - v_2) + \dots + r_{n-1}(v_{n-1} - v_n) + r_nv_n = 0 \Rightarrow (r_1, \dots, r_n) = (0, \dots, 0).$$
- 3 Det er givet, at der findes $r_1, \dots, r_n$, som opfylder
- $$(r_1, \dots, r_n) \neq (0, \dots, 0) \Rightarrow r_1(v_1 + w) + \dots + r_n(v_n + w) = 0.$$
- 4 Er mængden lukket over for addition?
- 8 Løs det homogene ligningssystem (to ligninger med fem ubekendte).
- 10 Betragt en basis for V .
- 12 Hvad er $p_0(2)$?
- 13 Benyt sætning 2.19 og sætning 1.9.
- 14 Benyt indirekte bevis, og udnyt sætning 2.8.

Kapitel 3

- 4 Bemærk, at $V = \{u \mid Tu = 0\} \cup \{u \mid Tu \neq 0\}$, og udvid den sidste mængde med elementet 0.
- 5 Vis, at $a_1Tv_1 + \dots + a_nTv_n = 0 \Rightarrow (a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$.
Benyt undervejs sætning 3.2.
- 7 Bemærk, at $T(\text{Sp}\{v_1, \dots, v_n\}) = \text{Sp}\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$.
- 8 Sæt $U = \{u \in V \mid u \notin \text{Ker } T\} \cup \{0\}$, og vis, at
- U er et underrum af V ,
- U opfylder de to stillede krav.
- 9 Bestem $\dim \text{Ker } T$, og benyt sætning 3.4.
- 10 Bestem dimensionen af det givne underrum. Passer dette tal i dimensionsformlen?
- 16 Betragt T 's restriktion til $\text{Ker } ST$, og benyt dimensionssætningen på denne afbildning. Udnyt, at $u \in \text{Ker } ST \Rightarrow Tu \in \text{Ker } S$.
- 20 Bemærk, at Tv angiver v 's koordinater mht. den givne basis og med koordinaterne skrevet som en søjlevektor. Vis, at T er lineær, og at T er en bijektion.

Kapitel 5

- 4 Lad S virke på begge sider af $(T - \lambda I)u = 0$, og udnyt, at $ST = TS$.
- 5 Facit: Egen værdi $\lambda = 1$ med tilhørende egenvektorer $c_1(1, 1)$
Egen værdi $\lambda = -1$ med tilhørende egenvektorer $c_2(1, -1)$
- 6 Facit: Egen værdi $\lambda = 0$ med tilhørende egenvektorer $c_1(1, 0, 0)$
Egen værdi $\lambda = 5$ med tilhørende egenvektorer $c_2(0, 0, 1)$
- 10 Lad T^{-1} virke på begge sider af $(T - \lambda I)v = 0$.

- 11 Lad T virke på begge sider af $(ST - \lambda I)v = 0$.
- 18 Vælg fx $T(w, z) = (z, w)$.
- 19 Vælg fx $T(w, z) = (w + z, w + z)$.
- 20 $\forall j: Tv_j = \lambda_j v_j \wedge Sv_j = \mu_j v_j$. Lad S virke på begge sider af den første identitet, og lad T virke på begge sider af den anden.
- 21 Vis først, at $V = \text{Ker } T + T(V)$. (Betragt $v = (v - Pv) + Pv$.)
Vis dernæst, at $u \in \text{Ker } T \cap T(V) \Rightarrow u = 0$.
- 23 Bliv inspireret af eksemplet side 78 i bogen.

Kapitel 6

- 1 I trekant ABC lyder en af cosinusrelationerne $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.
- 7 Mellemresultater: $|u + v|^2 - |u - v|^2 = 4 \operatorname{Re} \langle u, v \rangle$
 $i|u + iv|^2 - i|u - iv|^2 = 4 \operatorname{Im} \langle u, v \rangle$
 (De lodrette streger burde være dobbeltstreger.)
- 10 Facit: $(1, \sqrt{3}(2x - 1), \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1))$
- 15 Husk, at $V = U \oplus U^\perp$.
- 17 Betragt $v = Pv + (v - Pv)$. I hvilket rum ligger Pv , og i hvilket rum ligger $v - Pv$?
- 24 Lad ϕ være det lineære funktional, der for ethvert p har værdien $p(\frac{1}{2})$, dvs. $\phi(p) = p(\frac{1}{2})$. Bestem det entydige polynomium q , så $\phi(p) = \langle p, q \rangle$. Husk udtrykket for q nederst side 117 i bogen.
- 26 Facit: $T^*a = av$
- 28 Vis, at $T^*w = \bar{\lambda}w$ for alle $w \in V$.

- 31 (1) Udnyt opg. 15 samt dimensionsformlen $\dim V = \dim T(V) + \dim \text{Ker } T$.
 (2) Udnyt dimensionsformlen $\dim W = \dim T^*(W) + \dim \text{Ker } T^*$ samt resultatet under (1).
- 32 Husk, at $\text{Col } A = T(V)$, udnyt opg. 31 (2), og husk, at $\text{Col } A^T = \text{Row } A$.

Kapitel 7

- 1 a Er $\langle T1, x \rangle = \langle 1, Tx \rangle$?
 b Er $(1, x, x^2)$ en ortonormal basis ?
- 2 Betragt fx $S, T \in \mathcal{L}(R^2)$, $S(x, y) = (x, 2y)$, $T(x, y) = (y, x)$.
- 3 Er mængden af selvadjungerede operatorer lukket over for addition og skalarmultiplikation? Facit: a ja, b nej.
- 5 Betragt fx $S, T \in \mathcal{L}(F^2)$, $S(w, z) = (z, -w)$, $T(w, z) = (z, w)$.
 Bestem $S + T$ og $(S + T)^*$, og vis, at $S + T$ ikke er normal.
- 6 Udnyt 6.46 og 7.6.
- 8 Hvilken relation er der mellem egenvektorer hørende til forskellige egenverdier ?
- 9 Udnyt 7.9 og 7.7.
- 11 Husk, at kvadratroden af et komplekst tal ikke er entydig. Vælg én af værdierne.
- 12 Betragt fx $T \in \mathcal{L}(R^2)$, $T(x, y) = (-y, x)$. Bemærk, at $T^2 = -I$.
- 16 Betragt fx $T \in \mathcal{L}(F^2)$, $T(w, z) = (z, 0)$ og $U = \{ (w, 0) \mid w \in F \} \subseteq F^2$.
- 18 Betragt k lige (sæt $k = 2m$) og k ulige (sæt $k = 2m + 1$) hver for sig.
- 19 $\Rightarrow$: Udnyt, at $\exists S: T = S^*S$. Vis først, at $v \neq 0 \Rightarrow Sv \neq 0$ (indirekte bevis).
 Vis derefter, at $\langle Tv, v \rangle > 0$.
 $\Leftarrow$: Vis, at T er injektiv og derfor inverterbar.

- 21 Betragt fx $S(w, z) = (w + z, 0)$ som modeksempel.
- 22 Argumenter for, at S har mindst én reel egen værdi. Hvilke værdier kan en reel egen værdi antage her?
- 23 Mellemresultat: $T^*T(z_1, z_2, z_3) = (4z_1, 9z_2, z_3)$
 Facit: $S(z_1, z_2, z_3) = (z_3, z_1, z_2)$
- 24 Bestem først T^* , dernæst T^*T .
- 26 Udnyt den reelle spektralsætning.
- 27 Betragt fx $T(w, z) = (z, 0)$ som modeksempel.
 Mellemresultater: $T^*T(w, z) = (0, z)$, $T^2(w, z) = (0, 0)$
- 28 Vis først: T inverterbar $\Leftrightarrow T^*$ inverterbar (T inverterbar $\Leftrightarrow \exists S: TS = ST = I$)
- 29 Bemærk, at $Te_j = s_j f_j \neq 0$ for $s_j \neq 0$, og at $T(V) = \text{Sp}\{s_1 f_1, s_2 f_2, \dots, s_n f_n\}$.