6.5

43 Møntkast, $X \sim b(8, p)$

i $H_0: p = \frac{1}{2}$, $H_A: p \neq \frac{1}{2}$

ii $C = \{0, 8\}$

iii $\alpha = P(X=0) + P(X=8) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0{,}0078$ (≈ 8 ‰)

iv Krav: $\alpha \leq 0{,}1$

$P(X=0) + P(X=1) + P(X=7) + P(X=8) = 2(1+3)\left(\frac{1}{2}\right)^8$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}0313 < 0{,}1$

$C = \{0, 1, 7, 8\}$

44 # orkaner pr. år: $X \sim p(\lambda)$

orkaner pr. fire år: $\sum X_i \sim p(4\lambda)$

a $H_0: 4\lambda = 20$, $H_A: 4\lambda > 20$

Testvariabel: $\sum X_i \sim p(20)$

b Krav: $\alpha \leq 0{,}1$

$P(\sum X_i \geq x) \leq 0{,}1 \iff 1 - P(\sum X_i \leq x) \leq 0{,}1$

$x = 26 \Rightarrow 1 - P(\sum X_i \leq 26) = 1 - 0{,}9221 = 0{,}0729 < 0{,}1$

$C = \{27, 28, \ldots\}$

c $x_{obs} = 15 + 5 + 6 + 8 = 34 \in C$

H_0 forkastes

45 $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ uafh., σ^2 kendt

a $H_0: \mu = \mu_0$, $H_A: \mu \neq \mu_0$ (tosidet test valgt)

$z_{obs} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, forkast for $|z_{obs}| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

b Observationer: 999,4 998,8 1000,4 1000,8 1001,0

$H_0: \mu = 1000$, $H_A: \mu \neq 1000$, $\sigma^2 = 1$, $\alpha = 0{,}05$

$z_{obs} = \dfrac{1000{,}28 - 1000}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 0{,}626 < z_{0{,}975} = 1{,}960$

H_0 accepteres

6.5

48 Opinionsundersøgelse : $p_{obs} = 0{,}23$ baseret på $n = 1000$

$H_0 : p = 0{,}21$, $H_A : p > 0{,}21$

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1) \text{ app. under } H_0$$

$$z_{obs} = \frac{0{,}23 - 0{,}21}{\sqrt{\frac{0{,}21 \cdot 0{,}79}{1000}}} = 1{,}553 < z_{0{,}95} = 1{,}645$$

H_0 accepteres , dvs. ikke mere end en fordobling

50 X_1 : # trafikdrabte i Sverige i 2009 , $x_1 = 358$

X_2 : # trafikdrabte i Sverige i 2010 , $x_2 = 260$

Model : $X_i \sim p(\lambda_i)$, $i = 1, 2$

Estimater : $\hat{\lambda}_1 = x_1 = 358$, $\hat{\lambda}_2 = x_2 = 260$

$X_1 - X_2 \sim N(\lambda_1 - \lambda_2 , \lambda_1 + \lambda_2)$ app.

Yderligere approksimation : $\lambda_1 + \lambda_2 \approx \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 = x_1 + x_2$

$H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$, $H_A : \lambda_1 > \lambda_2$

$$Z = \frac{X_1 - X_2 - 0}{\sqrt{x_1 + x_2}} \sim N(0,1) \text{ app. under } H_0$$

$$z_{obs} = \frac{358 - 260}{\sqrt{358 + 260}} = 3{,}683 > z_{0{,}95} = 1{,}645$$

H_0 forkastes, dvs. # trafikdrabte faldt signifikant

6.6

52 Opkald specificeret på køn : F F F F F M

Sæt $p = P(M)$, $H_0 : p = \frac{1}{2}$, $H_A : p < \frac{1}{2}$

a $X \sim b(6, \frac{1}{2})$, $x = 1$

p-værdi $= P(X \le 1) = (1+6)(\frac{1}{2})^6 = 0{,}1094 < 0{,}05$

H_0 accepteres

fortsættes

6.6

52 fortsat

b $X \sim g(\frac{1}{2})$, $x = 6$

p-værdi $= P(X > 5) = (\frac{1}{2})^5 = 0{,}0313 < 0{,}05$

H_0 forkastes

c Uafhængighed mellem ophold

56 i $\alpha' = 1 - P(\text{alle deltest accepteres}) = 1 - (1-\alpha)^k$

$= 1 - (1-0{,}05)^k = 1 - 0{,}95^k$

ii α' størst for $k = 5$

$\alpha' = 1 - 0{,}95^5 = 1 - 0{,}7738 = 0{,}2262$

59 $H_0: \ p = \frac{1}{2}$

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = 2\sqrt{n}\,(\hat{p} - \tfrac{1}{2}) \sim N(0,1) \text{ app. under } H_0$$

a 'Forkast for $z_{obs} > 1{,}654$' svarer til et opad ensidet test på signifikansniveau 0,05, altså $H_A: \ p > \frac{1}{2}$

Styrkefunktion:

$$\gamma(p) = \Phi\left(\frac{2\sqrt{n}\,(p - \frac{1}{2}) - z_{0{,}95}}{2\sqrt{p(1-p)}}\right)$$ jf. opg. 60 b

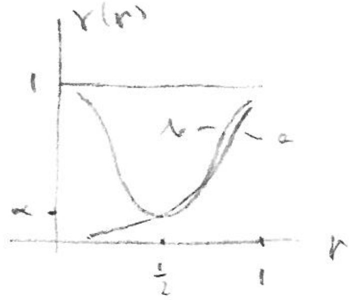
b 'Forkast for $|z_{obs}| > 1{,}960$' svarer til et tosidet test på signifikansniveau 0,05, altså $H_A: \ p \neq \frac{1}{2}$

Styrkefunktion:

$$\gamma(p) = \Phi\left(\frac{2\sqrt{n}\,(\frac{1}{2} - p) - z_{0{,}975}}{2\sqrt{p(1-p)}}\right) + \Phi\left(\frac{2\sqrt{n}\,(p - \frac{1}{2}) - z_{0{,}975}}{2\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

(kræves ikke udledt)

Skitse af styrkefunktioner:



6.6

60 $H_0 : p = \frac{1}{2}$, $H_A : p > \frac{1}{2}$

b $\quad \gamma(p) = P(Z \geq z_{1-\alpha})$

$$= P\left(2\sqrt{n}\,(\hat{p} - \tfrac{1}{2}) \geq z_{1-\alpha}\right)$$

$$= P\left(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \geq \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\left(\frac{1}{2} - p + \frac{z_{1-\alpha}}{2\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2\sqrt{n}\,(p - \frac{1}{2}) - z_{1-\alpha}}{2\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

a $\quad \alpha = 0{,}05$, $p = 0{,}6$

$$\gamma(0{,}6) = \Phi\left(\frac{2\sqrt{n}\,(0{,}6 - 0{,}5) - z_{0{,}95}}{2\sqrt{0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) = \Phi\left(\frac{0{,}2\sqrt{n} - 1{,}645}{2\sqrt{0{,}24}}\right)$$

Krav : $\gamma(0{,}6) \geq 0{,}9$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{0{,}2\sqrt{n} - 1{,}645}{2\sqrt{0{,}24}} \geq \Phi^{-1}(0{,}9) = 1{,}2816$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \lceil 210{,}35 \rceil = 211$$

6.7

64 X : # gode dage i en uge , $X \sim b(6, p)$

H_0 : $X \sim b(6, \frac{1}{2})$, H_A : $X \sim b(6, p)$, $p \neq \frac{1}{2}$

x_i	n_i		p_i	np_i	
0	1	10	0,0156	0,8112	5,6888
1	9		0,0938	4,8776	
2	12		0,2344	12,1888	
3	13		0,3125	16,2500	
4	11		0,2344	12,1888	
5	5	6	0,0938	4,8776	5,6888
6	1		0,0156	0,8112	
	$n = 52$				

frihedsgrader i χ^2-fordeling efter at klasser er slået sammen : $5 - 1 = 4$

$$\chi^2_{obs} = \sum \frac{x_i^2}{np_i} - n = 56{,}05 - 52 = 4{,}05 < \chi^2_{0{,}95}(4) = 9{,}49$$

H_0 : accepteres

6.7

65 X: # ulykker pr. uge

i H_0: $X \sim p(\lambda)$, $P(X=x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0,1,\ldots$

ii H_0: $X \sim g(p)$, $P(X=x) = p(1-p)^x$, $x = 0,1,\ldots$

Estimater (momentmetoden):

i $EX = \lambda$, $\lambda = \bar{x} \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{x} = \dfrac{\Sigma n_i x_i}{\Sigma n_i} = \dfrac{58}{50} = 1{,}1600$

ii $EX = \dfrac{1-p}{p}$, $\dfrac{1-p}{p} = \bar{x} \Rightarrow \hat{p} = \dfrac{1}{1+\bar{x}} = \dfrac{1}{1+1{,}16} = 0{,}4630$

I begge modeller fører maksimum likelihood metoden til samme estimat som ved momentmetoden.

			i Poisson model			ii Geom. model		
x_i	n_i		p_i	np_i		p_i	np_i	
0	24		0,3135	15,6743		0,4630	23,1481	
1	14		0,3636	18,1822		0,2486	12,4314	
2	4		0,2109	10,5457		0,1335	6,6761	
3	1		0,0816	4,0722		0,0717	3,5853	
4	4		0,0237	1,1825		0,0385	1,9255	
5	1	8	0,0055	0,2743	5,5978	0,0207	1,0340	7,7448
6	2		0,0011	0,0530		0,0111	0,5553	
≥7	0		0,0001	0,0105		0,0129	0,6442	
	$n = 50$							

frihedsgrader i χ^2-fordeling (begge modeller): $4-1-1=2$

i $\chi^2_{obs} = \Sigma \dfrac{x_i^2}{np_i} - n = 60{,}11 - 50 = 10{,}11 > \chi^2_{0,95}(2) = 5{,}99$

H_0 forkastes

ii $\chi^2_{obs} = \Sigma \dfrac{x_i^2}{np_i} - n = 51{,}31 - 50 = 1{,}31 < \chi^2_{0,95}(2) = 5{,}99$

H_0 accepteres

74 Stemmeafgivning i relation til uddannelsesbaggrund

H_0: Uafhængighed mellem stemmeafgivning og uddannelsesbaggrund

fortsættes

6.7

74 fortsat

	folkeskole	gymnasium	mellemudd.	højere udd.	$x_{i\cdot}$
stemmer	24	223	215	387	851
stemmer ikke	168	432	221	211	1031
$x_{\cdot j}$	194	655	436	598	1833 $= n$

Forventet antal : $\hat{x}_{ij} = \dfrac{x_{i\cdot}\, x_{\cdot j}}{n}$

frihedsgrader i χ^2- fordeling : $(4-1)(2-1) = 3$

$$\chi^2_{obs} = \sum_i \sum_j \frac{x_{ij}^2}{\hat{x}_{ij}} - n = 2090{,}07 - 1833 = 207{,}07$$

$$\gg \chi^2_{0,95}(3) = 7{,}81$$

H_0 forkastes