7.2

2 $X \sim \chi^2(r)$

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma(\frac{r}{2})} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad , \quad x \geq 0$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2})} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} \quad , \quad x \geq 0 \quad ,$$ hvoraf ses, at

$X \sim \Gamma(\frac{r}{2}, \frac{1}{2})$, dvs. $\chi^2(r) = \Gamma(\frac{r}{2}, \frac{1}{2})$

3 Formler for middelværdi og varians i gamma-fordelingen benyttes:

$$EX = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{1}{2}} = r \quad , \quad Var\,X = \frac{\frac{r}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2r$$

8 $V_x, V_y, V_z \sim N(0, \sigma^2)$ uafh.

$\Rightarrow \frac{1}{\sigma}V_x, \frac{1}{\sigma}V_y, \frac{1}{\sigma}V_z \sim N(0,1)$ uafh.

$\Rightarrow U = \frac{1}{\sigma^2}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \sim \chi^2(3)$

$$f_U(u) = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\Gamma(\frac{3}{2})} u^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{u}{2}} \quad , \quad u \geq 0$$

Bemærk, at $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Sæt $V = \sigma\sqrt{U}$, $v = \sigma\sqrt{u} \Leftrightarrow u = \frac{v^2}{\sigma^2}$, $\frac{du}{dv} = \frac{2v}{\sigma^2}$

$$f_V(v) = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \frac{v}{\sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \left| \frac{2v}{\sigma^2} \right|$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma^3} v e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad v \geq 0$$

7.3

9 X: Ozonkoncentration (ppm) , $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Observationer: 0,06 0,07 0,08 0,11 0,12 0,14 0,21

Beregning: $\bar{x} = 0{,}113$ $s = 0{,}0515$

fortsættes

7.3

9 fortsat

Konfidensinterval for μ med konfidensgrad 0,95 :

$$\mu = \bar{x} \pm t_{0,975}(6)\,\frac{s}{\sqrt{n}} = 0,113 \pm 0,702\,\frac{0,515}{\sqrt{7}}$$

$$= 0,113 \pm 0,048$$

11 X : Fejl på vægt , $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Observationer: $-0,08$ $-0,05$ $-0,02$ $0,01$ $0,02$ $0,06$ $0,07$

Beregning : $\bar{x} = 0,014$ $s = 0,0552$

Konfidensinterval for σ^2 med konfidensgrad 0,95 :

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0,975}(6)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{0,025}(6)} \iff \frac{6 \cdot 0,0552^2}{14,45} < \sigma^2 < \frac{6 \cdot 0,0552^2}{1,24}$$

$$\iff 0,0013 < \sigma^2 < 0,0147$$

Konfidensinterval for σ med konfidensgrad 0,95 :

$$0,036 < \sigma < 0,121$$

16 X : Dybde af sø , $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Observationer : 99 101 102 102 103 103 103

Beregning : $\bar{x} = 101,857$ $s = 1,4639$

$H_0: \mu = 100$, $H_A: \mu > 100$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{101,857 - 100}{\frac{1,4639}{\sqrt{7}}} = 3,357 > t_{0,95}(6) = 1,943$$

H_0 forkastes , dvs. søen er dybere end 100 m

19 X_1 : IQ før behandling X_2 : IQ efter behandling

$$X_d = X_2 - X_1 \sim N(\mu_d, \sigma_d^2)$$

$H_0: \mu_d = 0$, $H_A: \mu_d > 0$

fortsættes

7.3

19 fortsat

data : $\bar{x}_1 = 100$, $\bar{x}_2 = 103$, $s_d^2 = 318$, $n = 10$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1 - 0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{103 - 100}{\sqrt{\frac{318}{10}}} = 0{,}532 < t_{0,95}(9) = 1{,}833$$

H_0 accepteres , dvs. ingen forøgelse af IQ .

22 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Observationer : $-3{,}7$ $-1{,}5$ $-0{,}6$ $-0{,}4$ $-0{,}3$ $1{,}0$ $2{,}0$

Beregning : $s^2 = 3{,}300$

$H_0: \sigma^2 = 1$, $H_A: \sigma^2 > 1$

$$\chi^2_{obs} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{6 \cdot 3{,}300}{1} = 19{,}80 > \chi_{0,95}(6) = 12{,}51$$

H_0 forkastes , dvs. variansen større end 1 .

7.4

25 Vitamin E indhold (mg/g tør vægt) i to typer almindelig vrietorn .

Type A : 416 492 404 325 286 403

Type B : 279 352 320 385 315

$X_A \sim N(\mu_A, \sigma^2)$, $X_B \sim N(\mu_B, \sigma^2)$

$H_0: \mu_A = \mu_B$, $H_A: \mu_A \neq \mu_B$, $\alpha = 0{,}10$

Beregninger : $\bar{x}_A = 395{,}714$ $s_A = 69{,}7298$

$\bar{x}_B = 330{,}200$ $s_B = 40{,}1086$

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_A-1)s_A^2 + (n_B-1)s_B^2}{n_A + n_B - 2}} = \sqrt{\frac{6 s_A^2 + 4 s_B^2}{10}} = 59{,}6727$$

$$t_{obs} = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B - 0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} = \frac{395{,}714 - 330{,}200}{59{,}6727\sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{5}}} = 1{,}875 > t_{0,95}(10) = 1{,}812$$

H_0 forkastes (kan accepteres på 5% niveau)

26 Kolesteroltal før og efter indtagelse af koffein

Før	162	168	197	202	225
Efter	179	170	196	168	210
Difference	−17	−2	1	14	15

$X_d \sim N(\mu_d, \sigma_d^2)$, beregning: $\bar{x}_d = 2{,}20$, $s_d = 13{,}1415$

Konfidensinterval for μ_d med konfidensgrad 0,95 :

$$\mu_d = \bar{x}_d \pm t_{0{,}975}(4)\frac{s_d}{\sqrt{n}} = 2{,}20 \pm 2{,}776\,\frac{13{,}1415}{\sqrt{5}}$$

$$= 2{,}20 \pm 16{,}31$$

27 Forurening af vandløb før og efter passage af en industrivirksomhed

Før $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, data: $n_1 = 10$; $\bar{x}_1 = 13{,}2$; $s_1 = 2{,}8$

Efter $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, data: $n_2 = 15$; $\bar{x}_2 = 86{,}1$; $s_2 = 38{,}7$

Da $s_2 >> s_1$ benyttes Welsh-approksimation

Konfidensinterval for $\mu_2 - \mu_1$ med konfidensgrad 0,95 :

$$\mu_2 - \mu_1 = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \pm t_{0{,}975}(\nu)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$\nu \approx \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_2^4}{n_2^2(n_2-1)}} = \frac{\left(\frac{2{,}8^2}{10} + \frac{38{,}7^2}{15}\right)^2}{\frac{2{,}8^2}{10^2\cdot 9} + \frac{38{,}7^2}{15^2\,14}} = 14{,}22$$

$$\nu = \lfloor 14{,}22 \rfloor = 14$$

$$\mu_1 - \mu_2 = 86{,}1 - 13{,}2 \pm 2{,}145\sqrt{\frac{2{,}8^2}{10} + \frac{38{,}7^2}{15}}$$

$$= 72{,}9 \pm 21{,}5$$

28 Måling af pH med to forskellige typer instrumenter

Type 1 : $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, data: $n = 6$; $s_1 = 0{,}078$

Type 2 : $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, data: $n = 6$; $s_2 = 0{,}029$

fortsættes

7.4

28 fortsat

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, $H_A: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$F = \frac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}}{\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, n-1) \text{ under } H_0$$

$$f_{obs} = \frac{0{,}078^2}{0{,}029^2} = 7{,}23 \notin [f_{0,025}(5,5) ; f_{0,975}(5,5)]$$

$$= [0{,}14 ; 7{,}14]$$

H_0 forkastes, dvs. de to typer har forskellig målenøjagtighed