

Vink til opgaveset 12

3.11 132 Husk, at $p_k = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$, $k = 0, 1, \dots$

Facit: a $p_0 = 1$ b $p_1 = 1$ c $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

135 a Sæt p_s uden for summationstegnet.

b Husk formelen $G_{S_m}(s) = (G_X(s))^m$

137 Opgaveteksten skal forstås således, at N er uafhængig af X_k for alle k .

Husk formelen $G_{S_N}(s) = (G_N \circ G_X)(s)$ *

Facit: $X_k \sim k(1, \frac{\lambda}{N})$, $k = 1, 2, \dots$

138 Lad X være den oparbejdede gæld pr. kaffe køb.
Angiv X 's fordeling.

Bemerk, at $Y = 4X$ er heltallig.

Husk formelen $ES_N = EN EY$.

140 Lad X_k , $k = 1, \dots, N$, være antal personer pr. bil.
Angiv X_k 's fordeling.

Bemerk, at $Y = \sum_{k=1}^N X_k$.

a Bestem først $G_X(s)$ og $G_N(s)$, derefter $G_Y(s)$.

b Husk, at $P(Y=0) = G_Y(0)$.

c Husk også formelen

$$\text{Var } Y = EN \text{Var } X + \text{Var } N (EX)^2.$$

* Bemerk, at $G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$ og $G_{S_N}(s) = e^{N(s-1)}$

Bestem $G_X(s)$, så formeludtrykket passer.

142 (Svar opgave)

- a Husk, at $F_{M_N}(x) = P(M_N \leq x)$, og
 brug loven om total sandsynlighed på
 det sidste udtryk.

Husk også, at $F_{X_{(n)}}(x) = (F(x))^n$, når
 X_1, \dots, X_n er uafh. og identisk fordelte.

- b Krav: $F_{M_N}(x) \geq 0,9$.

147

- a Følge samme fremgangsmåde som ved
 udledningen af $G_{S_N}(s)$.

Resultatet skrives også $M_{S_N}(t) = (G_N \circ M_X)(t)$.

- b Husk, at den momentfrembringende funktion
 for $X \sim e(\lambda)$ er $\frac{\lambda}{\lambda - t}$, og at den sandsyn-
 lighedsfrembringende funktion for $N \sim g(p)$
 er $\frac{p^s}{1 - p - ps}$.

Bemærk, at S_N kan opfattes som tid mellem
 begivenheder i en udtyndet poissonproces.

- c Husk formlerne $EY = G_Y'(1)$ og $EZ = M_Z'(0)$.

149

- a Facit: $G_X(s) = G(s, 1)$ $G_Y(t) = G(1, t)$

- b Facit: $\text{Var } X = G_{s^2}(1, 1) + G_s(1, 1) - (G_s(1, 1))^2$
 $\text{Var } Y = G_{t^2}(1, 1) + G_t(1, 1) - (G_t(1, 1))^2$
 $\text{Cov}[X, Y] = G_{st}(1, 1) - G_s(1, 1) G_t(1, 1)$

fortsattes

149 fortsat

c i Bemærk, at $G(s, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} s^j t^k r_{jk}$

Ved partiel differentiering j gange mht. s og k gange mht. t får vi i punktet $(0, 0)$

$$G_{s^j t^k}(0, 0) = j! k! r_{jk}. \text{ Heraf fås } r_{jk}.$$

ii Bevis \Rightarrow : Udnyt, at $E[s^X t^Y] = E[s^X] E[t^Y]$

Bevis \Leftarrow : Udnyt udtrykket for $G_{s^j t^k}(0, 0)$ samt de tilsvarende udtryk for $G_X^{(j)}(0)$ og $G_Y^{(k)}(0)$.

3.12

150

a Bemærk, at $X \sim r\left(\frac{10}{13}\right)$

b Bemærk, at $T \sim e\left(\frac{1}{13}\right)$

c Bemærk, at $Y \sim r(1)$

d Husk, at antal begivenheder i disjunkte tidsintervaller er uafhængige.

151

a Bemærk, at $X \sim r\left(\frac{2}{7}\right)$

b Benyt en udtynket poissonproces med $\lambda r = 2 \frac{1}{10}$.

Sæt J_X en gennemsnitlig måned til 30,44 dg.

(Facitlisten regner med 1 md. = 4 uger.)

Antal ulykker med personskade pr. md:

$$Y \sim r\left(2 \frac{1}{10} \frac{30,44}{7}\right)$$

Facit: $P(Y \geq 1) = 0,5809$

c Facit: $N \sim b(52, e^{-2})$

156 Se løsningen til opgave 3.5 25 (opg. sat 7)

Husk $\lambda := \lambda t$.

157 Antal sydgående biler : $X \sim \nu(2t)$

Antal nordgående biler : $Y \sim \nu(3t)$

Angiv fordelingen af $X+Y$.

a, b -

c Bemærk, at $Y | X+Y=n \sim \nu(n, -)$,
if. opg. 154

d Bemærk, at $Z_j \sim U[0; 10]$, $j=1, \dots, 4$ uafh.

Udregn $\binom{4}{2} P(Z_k \leq 5) P(Z_l \leq 5)$, $k \neq j$

156 (Svar opgave)

Antal assistancer: $X \sim \nu(2)$ $\begin{cases} Y = \text{Adams job} \\ Z = \text{Barrys job} \end{cases}$

a Bemærk, at $P(Y=k) = \frac{e^{-2} 2^{2k-1}}{(2k-1)!}$, $k=1, 2, \dots$

b $P(X \leq 1)$

c Angiv Z 's fordeling.

Ved summation kan benyttes, at

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

159 (Svar opgave)

$$P(X=k(T)) = \int_0^{\infty} P(X=k) f_T(t) dt,$$

\vdots if. saten. 3.6 side 167

$$= \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda} \right)^k \frac{\lambda}{\mu+\lambda}, \quad k=0, 1, \dots$$

$$\text{Facit: } Y \sim g\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)$$