

## Vink til opgavesæt 14

5.3

1 H. opg. 2.4 25 a

2 H. opg. 2.4 25 b

3 (Svar opgave)

$Y \sim p(x)$  kan opfattes som antal begivenheder i tidsintervallet  $[0; x]$  i en poissonprocess med intensitet 1.

Bemerk, at  $Y = \min \{ n \mid S_{n+1} > x \}$ .

Facit:  $Y = \min \{ n \mid -\sum_{k=1}^n \ln U_k > x \} - 1$ ,

$U_k \sim U[0; 1]$ ,  $k = 1, \dots, n$ , uafh.

4 Antal begivenheder i tidsintervallet  $[0; t]$  kan fastlægges ved simulering af  $N \sim p(xt)$ , jf. opg. 3 med  $x := xt$ .

Begivenhedernes placering i  $[0; t]$  kan fastlægges i henhold til 'order statistic property', se side 243.

5 (Svar opgave)

Husk, at  $X = \sum_{j=1}^r Y_j$ ,  $Y_j \sim g(p)$ ,  $j = 1, \dots, r$ , uafh.

Bemerk, at  $P(Y_j = k) = P(Y_j > k-1) - P(Y_j > k)$ .

$Y_j = k$ , når  $\underbrace{(1-p)^k < u < (1-p)^{k-1}}$ ,  $u \sim U[0; 1]$   
omformes til  $\dots < m < \dots$

Møllenresultat:

$$Y_j = \left[ \frac{\ln u}{\ln(1-p)} \right] + 1, \quad u \sim U[0; 1]$$

Facit:

$$X = \sum_{j=1}^r \left[ \frac{\ln U_j}{\ln(1-p)} \right] + r, \quad U_j \sim U[0; 1], \quad j = 1, \dots, r, \text{ uafh.}$$

- 5.4 7 Bestem  $X$ 's fordelingsfunktion, og benyt derefter invers transformations metoden.
- 8 a  $X$ 's tæthedsfunktion er  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ,  $-\infty < x < \infty$ .
- 9  $X$ 's fordelingsfunktion er  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x^2}$ ,  $0 < x < \infty$ .
- 11 Facit:
- $$X = \begin{cases} 0 & , \text{ når } 0 < u \leq 1 \\ -\ln \frac{5u}{4} & , \text{ når } 0 < u \leq 0,8 \end{cases}, \quad U \sim U[0;1]$$
- 13 Mellenresultat:
- $$\ln X = \ln(-\ln U), \quad U \sim U[0;1]$$
- Benyt store tabs lør til approksimativ bestemmelse af  $E[\ln X]$
- 14 Vis, at  $E[\sin X] = 0$ , og dermed at cirkulerende bortfølder.
- 15 Benyt store tabs lør på indikatorvariable for hændelsen  $X+Y+Z \leq 2,5$ .
- 16 N. opg. 4.2 3.
- 17 Benyt transformationen
- $$X_1 = \epsilon_1 X + \mu_1$$
- $$Y_1|_{X_1} = \epsilon_2 \sqrt{1-\rho^2} Y + \mu_2|_{X_1}$$
- Facit:
- $$(X_1, Y_1) = (\epsilon_1 X + \mu_1, \epsilon_2 (\rho X + \sqrt{1-\rho^2} Y) + \mu_2)$$

- 18 Bemerk, at  $f(r, \theta) = \frac{1}{\pi}$ ,  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$

Mellanresultater :

$$f_R(r) = 2r, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$F_R(r) = r^2, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \Theta \sim U[0; 2\pi]$$

Bemerk, at X og Y er ukorrelerede, men ikke uafhængige.

- 19 Vælg fx  $Y \sim \Gamma(3, 1)$ ,  $g(y) = \frac{1}{2}y^2 e^{-y}$ , som reference.

Mellanresultater :

$$\frac{f(y)}{cg(y)} = \frac{1}{c} \frac{8e^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-\frac{1}{2})^2} < 1 \text{ for } c = \frac{8e^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \approx 5,80$$

$$Y = -\sum_{k=1}^3 \ln V_k, \quad V_k \sim U[0; 1], \quad k = 1, 2, 3$$

uafh.

Facit :

$$X = y, \quad \text{når } u < e^{-(y-\frac{1}{2})^2}, \quad u \sim [0; 1], \quad u \text{ og } Y$$

uafh.,  
ellers afvis