

Vink til opgavesæt 19

8.4 33 Facit : En matrække.

34 i -

ii Bemerk, at $P_t' = P_t G \Leftrightarrow P_t'^T = G^T P_t^T$

Den trasponerede udgave kan opfattes som to sæt sammenhængende første ordens differentiale ligninger, jf. løsning af $\dot{x} = Ax$ (se fx Spence, Insel, Friedberg s. 339-344).

Mellemløsninger :

- Egenværdier (benavnt α) og tilhørende egenvektorer for matricen G^T

$$\alpha = 0, \quad v = r(\mu, \lambda), \quad r \neq 0$$

$$\alpha = -(\lambda + \mu), \quad v = s(1, -1), \quad s \neq 0$$

Fordelig løsning :

$$S^{-1} P_t^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 e^{-(\lambda+\mu)t} & c_4 e^{-(\lambda+\mu)t} \end{bmatrix}, \quad \text{det}$$

$$S^{-1} P_t^T S = D = \begin{bmatrix} 0 & -(\lambda+\mu) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{med } S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & -1 \end{bmatrix}.$$

Begyndelsesbetingelser $P_0^T = I$ gør os til
bestemmelser af c_1, c_2, c_3 og c_4 .

Facit (efter tilbage-transponering) :

$$P_t = \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{bmatrix} \mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t} & \lambda(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) \\ \mu(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) & \lambda + \mu e^{-(\lambda+\mu)t} \end{bmatrix}$$

(I denne opgave ville det være lidt simplert
at brygge de diagonalede ligninger, idet
der i så fald ikke skulle transponeres.)

iii -

- 35 a Lad $Y_{(1)}$ betegne det tidspunkt, hvor en fugl forlader fjordenværelset.
- Angiv fordelingen af $Y_{(1)}$ (afhænger af den tilstand, processen er i).
- b -
- c En andring er ankomst af en fugl, eller at en fugl forlader brattet.
- d Betragt $\xleftarrow[4]{\text{4} \rightarrow \infty}$, og udregn $P(X < Y_{(1)})$, hvor X betegner tiden til ankomst af en fugl.
- 36 Antag, at $\mu_i > 0$, og lad N være det antal gange, at processen successivt befinder sig i tilst. i. Angiv fordelingen af N . ($N \sim q(\cdot)$)
- Set $n_{ii} := 0$, og juster π_i og n_{ij} , $j \neq i$, således at processen forbliver uændret samtidig med, at vi opnår den sædvanlige beskrivelse.
- 37 a -
- b Rekhuoperations
- $$G^T = \begin{bmatrix} -a & \frac{1}{2}b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & -b & \frac{1}{2}b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}b & -b & \frac{1}{2}b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}b & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & \frac{1}{2}b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2}b & -b & \frac{1}{2}b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2}b & -b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2}b & -a \end{bmatrix}$$

fortsættes

37 b fortsat

$$\sim \begin{bmatrix} -2a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -b & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Facit : i $\pi = \frac{1}{2b+2a(m-1)} (b, 2a, \dots, 2a, b)$

ii $\pi = \frac{1}{m+1} (1, \dots, 1)$ for $b = 2a$

iii π i opg. 8.3 24 c er ikke en ligefordeling

38 a Vis, at $(\sum_i \frac{v_i}{\lambda_i} \underline{\nu}) P = \frac{1}{\sum_i v_i} \underline{\nu}$

b i Vis, at $\forall j : \sum_i \gamma_{ij} \frac{c v_i}{\lambda_i} = 0$

ii Udled, at $c = \frac{1}{\sum_i \frac{v_i}{\lambda_i}}$

c Vis, at $\underline{1} P = \underline{1}$

d Vis, at den stationære fordeling for $\{X_t\}$ er

$$\pi_0 = \frac{3}{3+\pi^2}, \quad \pi_k = \frac{3}{(3+\pi^2)k^2}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

og afgør, om $\{X_t\}$ er pos./neg. multikurrent.

Benyt satz. 8.6 side 466 til at afgøre, om $\{X_n\}$ er pos./neg. multikurrent.

39 Facit : $\lambda_k > \left(\frac{1}{2}\right)^k$