Supplement vedrørende invers matrix

Sætning 1 (Entydighed). *For kvadratiske matricer A, C og D gælder, at*

$$AC = I \quad \wedge \quad DA = I \quad \Rightarrow \quad C = D.$$

Bevis.

$$C = IC = (DA)C = D(AC) = DI = D.$$

Altså er $C = D$. $\square$

Sætning 2 (Rækkeækvivalens). *$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en løsning for ethvert $\boldsymbol{b}$, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med I.*

Bevis. Vi antager først, at $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en løsning for ethvert $\boldsymbol{b}$, og vi argumenterer indirekte. Antag A *ikke* er rækkeækvivalent med I. Det betyder, at A ved rækkeoperationer kan omformes til en matrix med en nulrække som sidste række. Udføres rækkeoperationerne på totalmatricen $[A|\boldsymbol{b}]$ vil $\boldsymbol{b}$ blive omdannet til en vektor $\boldsymbol{c}$. Når sidste komponent i $\boldsymbol{c}$ er forskellig fra 0, har $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ingen løsning, hvilket giver en modstrid. Altså er A rækkeækvivalent med I.

Går vi omvendt ud fra, at A er rækkeækvivalent med I, viser rækkeoperationer, at $[A|\boldsymbol{b}] \sim \cdots \sim [I|\boldsymbol{c}]$. Dvs. for et vilkårligt $\boldsymbol{b}$ får vi løsningen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$. $\square$

Sætning 3. *For kvadratiske matricer A og C gælder, at*

$$AC = I \quad \Rightarrow \quad CA = I.$$

Bevis. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en løsning for ethvert $\boldsymbol{b}$, nemlig $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{b}$, idet $A(C\boldsymbol{b}) = (AC)\boldsymbol{b} = I\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$. A er altså rækkeækvivalent med I, jf. sætning 2. Når A er rækkeækvivalent med I, så findes elementarmatricer $E_1, E_2, \ldots, E_k$, så $E_k \cdots E_2E_1A = I$ eller $DA = I$, hvor $D = E_k \cdots E_2E_1$. Vi har nu $AC = I$ og $DA = I$, hvorefter $D = C$ ifølge sætning 1. $\square$

Korollar 1. $AC = I \quad \Rightarrow \quad A$ *er regulær* $\quad \wedge \quad A^{-1} = E_k \cdots E_2E_1$.

Korollar 2. *A er regulær, hvis og kun hvis A er rækkeækvivalent med I.*

Korollar 3. *For kvadratiske matricer A og B gælder, at*

$$AB = I \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = B \quad \wedge \quad B^{-1} = A.$$

Algoritme 1. Simultant gælder

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I \qquad \wedge \qquad E_k \cdots E_2 E_1 I = A^{-1},$$

dvs.

$$[A|I] \sim \cdots \sim [I|C] \quad \Rightarrow \quad C = A^{-1}. \qquad \square$$

En matrixligning. For matrixligningen $AX = B$, hvor A er regulær, gælder

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad IX = A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}B.$$

Algoritme 2. Simultant gælder

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I \qquad \wedge \qquad E_k \cdots E_2 E_1 B = A^{-1}B,$$

dvs.

$$[A|B] \sim \cdots \sim [I|C] \quad \Rightarrow \quad C = A^{-1}B. \qquad \square$$

19.9.2012/BR