Lineær afhængighed

Sætning. *Vektorerne $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ er lineært afhængige, hvis og kun hvis mindst én af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de øvrige.*

Endvidere når $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ er lineært afhængige og $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$, så findes et $j > 1$, således at $\boldsymbol{v}_j$ kan udtrykkes som en linearkombination af de forudgående vektorer $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}$.

Bevis. Vi antager først, at $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ er lineært afhængige. Der bliver to tilfælde at skelne imellem:

i. $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$: $\boldsymbol{v}_1$ kan skrives $\boldsymbol{v}_1 = 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_k$, dvs. $\boldsymbol{v}_1$ er en linearkombination af de øvrige vektorer.

ii. $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$: Forudsætningen betyder, at der findes et egentligt talsæt $(r_1, \ldots, r_k)$, så $r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + r_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$. Vælg det største j, så $r_j \neq 0$, altså

$$r_j \neq 0 \quad \wedge \quad r_{j+1} = \cdots = r_k = 0.$$

Bemærk, at $j > 1$, idet $j = 1 \Rightarrow r_1\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$, hvilket er i modstrid med antagelse ii. Vi kan nu isolere $\boldsymbol{v}_j$:

$$\boldsymbol{v}_j = -\frac{r_1}{r_j}\boldsymbol{v}_1 - \frac{r_2}{r_j}\boldsymbol{v}_2 - \cdots - \frac{r_{j-1}}{r_j}\boldsymbol{v}_{j-1}.$$

$\boldsymbol{v}_j$ er netop udtrykt som en linearkombination af $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}$.

Vi antager nu, at én af vektorerne, fx. $\boldsymbol{v}_j$, kan skrives som en linearkombination af de øvrige vektorer:

$$\boldsymbol{v}_j = s_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + s_{j-1}\boldsymbol{v}_{j-1} + s_{j+1}\boldsymbol{v}_{j+1} + \cdots + s_k\boldsymbol{v}_k.$$

Dette er ensbetydende med

$$s_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + s_{j-1}\boldsymbol{v}_{j-1} - \boldsymbol{v}_j + s_{j+1}\boldsymbol{v}_{j+1} + \cdots + s_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0},$$

hvoraf ses, at $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ er lineært afhængige, da koefficienten til $\boldsymbol{v}_j$ er -1. $\square$

25.9.2012/BR