Prøveeksamen A i "Lineær Algebra"

Første Studieår ved Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet og Det Sundhedsvidenskabelige Fakultet

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der må ikke benyttes lommeregner, mobiltelefon eller computer.

De anførte procenter angiver med hvilken vægt de enkelte opgaver tæller ved den samlede bedømmelse.

Dette eksamenssæt har to uafhængige dele. Del I indeholder ″almindelige opgaver″. I forbindelse med del I er det vigtigt at du forklarer tankegangen bag opgavebesvarelsen, og at du medtager mellemregninger i passende omfang. Del II indeholder ″multiple choice″opgaver. **Del II skal afkrydses i nærværende opgavesæt.**

Husk at skrive jeres fulde navn, studienummer samt hold nummer på hver side af besvarelsen. **Nummerer siderne, og skriv antallet af afleverede ark på 1. side** af besvarelsen. God arbejdslyst.

NAVN: ________________________________

STUDIENUMMMER: ________________________________

HOLD NUMMER: ________________________________

Del I (”almindelige opgaver”)

Opgave 1:(5%) Lad

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Find det B.
2. Bestem B^{-1}.
3. Bestem $\left(B^T\right)^{-1}$.

Opgave 2:(8%) Betragt ligningssystemet

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ & x_2 & -x_3 & = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & & = & 3. \end{array}$$

1. Opskriv koefficientmatricen for ligningssystemet.
2. Opskriv den udvidede matrix (totalmatrix) for ligningssystemet.
3. Find samtlige løsninger til ligningssystemet.

Opgave 3:(8%) Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Find en basis for søjlerummet hørende til A.
2. Bestem rank$A$ og nullity$A$.
3. Hvor mange vektorer er der i en basis for nulrummet af A? (begrund dit svar.)

Opgave 4:(9%) Lad

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Find egenværdierne af C.
2. Bestem en basis for hver af de tilhørende egenrum.

Opgave 5:(14%) Find den partikulære løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 4y_1 + y_2 \end{aligned}$$

under begyndelsesbetingelserne $y_1(0) = 15, y_2(0) = -10$.

Opgave 6:(10%)

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for underrummet $W \subseteq \mathbf{R}^4$.

1. Find vha. Gram-Schmidt processen en ortogonal basis for W.
2. Bestem herefter en ortonormal basis for W.

Opgave 7:(8%) Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Bring A på reduceret række-echelon form (reduceret trappeform) ved hjælp af præcis to elementære rækkeoperationer.
2. Lad R være den den reducerede række-echelon form (reduceret trappeform) af A. Find elementærmatricer E_1 og E_2, så $R = E_2E_1A$ holder.
3. Find elementærmatricer E_3 og E_4, så $A = E_4E_3R$ holder.

Opgave 8:(8%) I denne opgave arbejdes der med lineære transformationer fra $\mathbf{R}^2$ ind i $\mathbf{R}^2$.

1. Opskriv matricen for en rotation mod uret med 90^o.
2. Opskriv matricen for en spejling i første-aksen.
3. Opskriv matricen, som svarer til, at vi først roterer som i delspørgsmål 1 og dernæst spejler som i delspørgsmål 2.

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9:(7%)
Betragt en $m \times n$ matrix A med følgende egenskaber:

1. A har 6 pivotsøjler.
2. Der findes et $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$, således at ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er inkonsistent.

Baseret på disse oplysninger skal man bestemme de *mindste* mulige værdier for m og n.

Angiv den mindste værdi m kan have:

☐ 0	☐ 2	☐ 4	☐ 6	☐ 8	☐ 10
☐ 1	☐ 3	☐ 5	☐ 7	☐ 9	☐ 11

Angiv den mindste værdi n kan have:

☐ 0	☐ 2	☐ 4	☐ 6	☐ 8	☐ 10
☐ 1	☐ 3	☐ 5	☐ 7	☐ 9	☐ 11

Opgave 10:(10%) Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & -8 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -81 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -604 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Afkryds *samtlige* sande udsagn nedenfor (bemærk: hver forkert afkrydsning *ophæver* én rigtig afkrydsning).

- ☐ A er inverterbar (regulær).
- ☐ Den lineære transformation induceret af A er injektiv (engelsk: one-to-one).
- ☐ A er på reduceret række-echelon form (reduceret trappeform).
- ☐ nullity $A = 0$.
- ☐ rank $A = 4$.
- ☐ A er på række-echelonform (trappeform).
- ☐ nullity A + rank $A = 5$.
- ☐ Den lineære transformation induceret af A er surjektiv (engelsk: onto).
- ☐ For ethvert $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^5$ er ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsistent.
- ☐ A er en 4×5-matrix.

Opgave 11:(5%) Der er givet fire vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$, således at både $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ og $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ lineært *uafhængige*. Afkryds det sande udsagn nedenfor.

- ☐ $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ er altid lineært uafhængige.
- ☐ $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ er aldrig lineært uafhængige.
- ☐ Med de givne oplysninger kan det *ikke* afgøres om $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ er linært uafhængige.

Opgave 12:(8%) Besvar følgende 4 sand/falsk opgaver:

a. Standardmatricen for en inverterbar lineær transformation $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er altid kvadratisk.

☐ Sand ☐ Falsk

b. En lineær transformation givet ved en 4×5-matrix er aldrig surjektiv (engelsk: onto).

☐ Sand ☐ Falsk

c. Alle inverterbare matricer kan diagonaliseres.

☐ Sand ☐ Falsk

d. Lad W være et underrum af $\mathbf{R}^6$ med dimension 4. Så gælder altid, at 4 lineært uafhængige vektorer i W udgør en basis for W.

☐ Sand ☐ Falsk