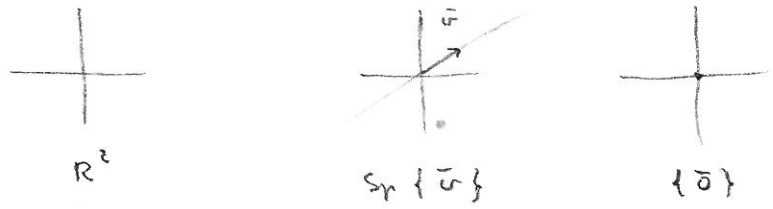
Underrum (af vektorrum)

V vektorrum, $W \subseteq V$

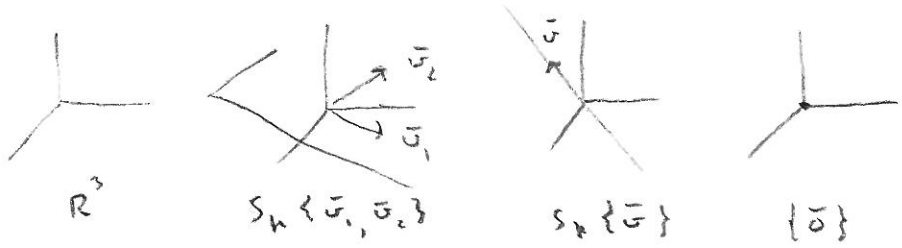
W er et underrum, når

1. $W \neq \emptyset$
2. W er lukket over for addition og skalarmult.

eks underrum af $\mathbb{R}^2$:



underrum af $\mathbb{R}^3$:



$\{\bar{0}\}$ kaldes det trivielle underrum

Bemærk $W \neq \emptyset \iff \bar{0} \in W$, idet

$W \neq \emptyset \Rightarrow \exists \bar{v} \in W \Rightarrow 0\bar{v} \in W \Rightarrow \bar{0} \in W$, og

$\bar{0} \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$

eks. underrum?

$\{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid v_1, v_2 \geq 0\}$

nej

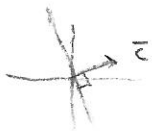
$\{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid |v_1| = |v_2|\}$

nej

$\{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 v_2 \geq 0\}$

nej

$\{\bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{v} \perp \bar{c}\}$



ja

eks $\quad P_n = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$

$Q = \{ q(x) = b_0 + b_2 x^2 + \dots + b_{2m} x^{2m} \mid b_0, \dots, b_{2m} \in \mathbb{R},$

$m = [\frac{n}{2}] \}$

Q er underrum af P_n

Sætn. $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in V$

$Sp\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$ er underrum af V

bevis 1. $\bar{v}_j \in Sp\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\} \neq \emptyset$

2. $\bar{u}, \bar{v} \in Sp\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}, \quad r \in \mathbb{R}$

$\bar{u} = r_1 \bar{v}_1 + r_2 \bar{v}_2 + \dots + r_k \bar{v}_k$

$\bar{v} = s_1 \bar{v}_1 + s_2 \bar{v}_2 + \dots + s_k \bar{v}_k$

$\bar{u} + \bar{v} = (r_1 + s_1)\bar{v}_1 + (r_2 + s_2)\bar{v}_2 + \dots + (r_k + s_k)\bar{v}_k$

$\Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in Sp\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$

$r\bar{u} = rr_1 \bar{v}_1 + rr_2 \bar{v}_2 + \dots + rr_k \bar{v}_k$

$\Rightarrow r\bar{u} \in Sp\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$

Bemærk, når $V = \mathbb{R}^n$

Nødv. bet. for $Sp\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\} = \mathbb{R}^n$: $k \geq n$

Nødv. bet. for $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ lin. uafh. : $k \leq n$

Underrum hørende til en matrix

$A = [\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \dots \ \bar{a}_n] \qquad m \times n$

$\text{Nul } A = \{ \bar{x} \mid \underbrace{A\bar{x} = \bar{0}}_{\text{hom. lign. syst.}} \}$ nulrummet

1. $\bar{0} \in \text{Nul } A \Rightarrow \text{Nul } A \neq \emptyset$

2. $\bar{u}, \bar{v} \in \text{Nul } A, \quad r \in \mathbb{R}$

$A(\bar{u} + \bar{v}) = A\bar{u} + A\bar{v} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in \text{Nul } A$

$A(r\bar{u}) = rA\bar{u} = r\bar{0} = \bar{0} \Rightarrow r\bar{u} \in \text{Nul } A$

$\text{Col } A = \text{Sp}\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ søjlerummet

$\text{Row } A$ = spændt af rækkevektorerne i A

rækkerummet

Bemærk $\text{Nul } A \subseteq R^n$

$\text{Col } A \subseteq R^m$

$\text{Row } A \subseteq R^m$

eks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & -3 \\ 3 & -5 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = (1, 0, 1, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & -3 \\ 3 & -5 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\bar{x} = \bar{0} \iff \bar{x} = r \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r, s \in R$$

$$\text{Nul } A = \text{Sp}\{(-5, -2, 1, 0), (3, 1, 0, 1)\}$$

$\bar{v} \in \text{Nul } A$? $A\bar{v} = (1, 3, 4, -2) \neq \bar{0} \Rightarrow \bar{v} \notin \text{Nul } A$

$\bar{v} \in \text{Col } A$? tilsv. rækkeoperationer med $\bar{v}$ som højreside:

$$\cdots \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \sim \cdots \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \bar{v} \in \text{Col } A, \ \bar{v} = -3\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2$

$$\text{Col } A = \text{Sp}\{(1, 2, 3, -1), (-2, -3, -5, 1)\}$$

$$\text{Row } A = \text{Sp}\{(1, 0, 5, -3), (0, 1, 2, -1)\}$$

rang $A = 2$

nullitet $A = 2$

Underrum hørende til en lineær transformation

$T: V \to W$, $T(\bar{x}) = \ldots$

$\operatorname{Ker} T = \{ \bar{x} \mid T(\bar{x}) = \bar{0} \}$ kernen af T (el. nulrummet)

$T(V) = \{ T(\bar{x}) \mid x \in V \}$ billedmængden (eng. range)

$\operatorname{Ker} T \subseteq V$, $\operatorname{Ker} T$ er underrum af V

1 $T(\bar{0}) = \bar{0} \Rightarrow \bar{0} \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow \operatorname{Ker} T \neq \emptyset$

2. $\bar{u}, \bar{v} \in \operatorname{Ker} T$, $r \in R$

$T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v}) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \bar{u}+\bar{v} \in \operatorname{Ker} T$

$T(r\bar{u}) = rT(\bar{u}) = r\bar{0} = \bar{0} \Rightarrow r\bar{u} \in \operatorname{Ker} T$

$T(V) \subseteq W$, $T(V)$ er underrum af W

1. $T(\bar{0}) = \bar{0} \Rightarrow \bar{0} \in T(V) \Rightarrow T(V) \neq \emptyset$

2 $\bar{u}, \bar{v} \in T(\bar{v})$, $r \in R$

$\bar{u}, \bar{v} \in T(\bar{v}) \Rightarrow \exists\, \bar{x}, \bar{y} \in V : \bar{u} = T(\bar{x})$, $\bar{v} = T(\bar{y})$

$\bar{u} + \bar{v} = T(\bar{x}) + T(\bar{y}) = T(\bar{x}+\bar{y}) \Rightarrow \bar{u}+\bar{v} \in T(V)$

$r\bar{u} = rT(\bar{x}) = T(r\bar{x}) \Rightarrow r\bar{u} \in T(V)$

eks. $T: R^{n\times n} \to R$, $T(A) = \operatorname{tr} A$ (sporet af A)

$\operatorname{Ker} T = \{ A \mid \operatorname{tr} A = 0 \} \subseteq R^{n\times n}$

$T(R^{n\times n}) = \{ r \mid r = \operatorname{tr} A \} = R$

Bemærk, når $T: R^n \to R^m$, $T(\bar{x}) = A\bar{x}$

$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Nul} A$

$T(V) = \operatorname{Col} A$

Sætn. (udskiftning af vektorer i $Sp\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$)

$$\left.\begin{array}{l} \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m \in V \\ \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \text{ lin. uafh.} \\ Sp\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\} = Sp\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} = V \end{array}\right\} \Rightarrow k \le m$$

bevis (konstruktivt)

$\bar{v}_1, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ lin. afh. $\Rightarrow \exists\, \bar{u}_j : \bar{u}_j \in Sp\{\bar{v}_1, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{j-1}\}$

$\Rightarrow \bar{u}_j$ kan fjernes fra $Sp\{\bar{v}_1, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$

Vi har altså tilføjet $\bar{v}_1$ og fjernet $\bar{u}_j$, men spændet er det samme.

Proceduren gentages med tilføjelse af $\bar{v}_2$ ...

Til slut har vi

$$Sp\{\underbrace{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{u}_{j_1}, \dots, \bar{u}_{j_{m-k}}}_{m \text{ vektorer}}\} = Sp\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\},$$

heraf $k \le m$

Basis for vektorrum

En basis for V er et ordnet system af vektorer $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$, hvor der gælder

1. $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ er lin. uafh.
2. $Sp\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} = V$

De naturlige (eller kononiske) basser for

R	R^2	R^3	R^n
			$\mathcal{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$
$\mathcal{E} = 1$	$\mathcal{E} = (\bar{i}, \bar{j})$	$\mathcal{E} = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$	$\bar{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$
	$\bar{i} = (1, 0)$	$\bar{i} = (1, 0, 0)$	↑ j'te komponent
	$\bar{j} = (0, 1)$	$\bar{j} = (0, 1, 0)$	
		$\bar{k} = (0, 0, 1)$	

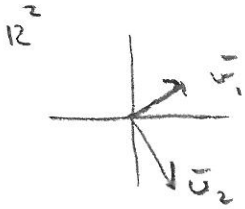
Har $\{\bar{0}\}$ en basis?

eks basis for P_n : $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$

eks basis for $Sp\{e^x, e^{-x}\}$: $\mathcal{B} = (e^x, e^{-x})$

Er en basis entydigt fastlagt? Nej!

eks.



$\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$

($\bar{v}_1, \bar{v}_2$ lin. uafh., $Sp\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\} = \mathbb{R}^2$)

Basis for underrum hørende til en matrix

Nul A : Et ordnet system af lineært uafhængige løsninger til $A\bar{x} = \bar{0}$ (antal : nullitet A)

Col A : Et ordnet system af pivotsøjler i A (antal : rang A)

Row A : Et ordnet system af egentlige rækkevektorer i den reducerede række-echelonform for A (antal : rang A)

eks. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & -3 \\ 3 & -5 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, se tidligere regninger

$\mathcal{B}_{\text{Nul}\,A} = ((-5, -2, 1, 0), (3, 1, 0, 1))$

$\mathcal{B}_{\text{Col}\,A} = ((1, 2, 3, -1), (-2, -3, -5, 1))$

$\mathcal{B}_{\text{Row}\,A} = ((1, 0, 5, -3), (0, 1, 2, -1))$

eks Bestem en basis for

$Sp\{(1, 0, -1, 2), (1, 1, -2, 1), (-2, 3, -1, -2), (1, -1, 0, 3), (0, 1, -1, 2)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \qquad \uparrow$ lin. uafh.

$\mathcal{B} = ((1, 0, -1, 2), (1, 1, -2, 1), (0, 1, -1, 2))$

Basis for underrum hørende til en lineær transformation

eks. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $T(\bar{x}) = x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4$

Bemærk $T(\bar{x}) = \bar{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0} \iff A\bar{x} = \bar{0}$

Løsn. til $A\bar{x} = \bar{0}$: $\bar{x} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $r, s, t \in \mathbb{R}$

$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} T} = \mathcal{B}_{\operatorname{Nul} A} = ((1,1,0,0), (-2,0,1,0), (-1,0,0,1))$

$\mathcal{B}_{T(\mathbb{R}^4)} = \mathcal{B}_{\operatorname{Col} A} = 1$

Sætn. (reduktion til en basis)

$\operatorname{Sp}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} = V$

$(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ kan reduceres til en basis

bevis (konstruktivt)

Hvis $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ er lin. uafh, så har vi en basis

Hvis $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ er lin. afh, så $\exists\, \bar{v}_j \in \operatorname{Sp}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}\}$

$\bar{v}_j$ fjernes, spændet uændret

Processen gentages, til vi opnår et lin. uafh. system

Sætn (udvidelse til en basis)

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in V$ (endeligt dimensionalt)

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ lin. uafh. kan udvides til en basis for V

bevis (konstruktivt)

Hvis $\operatorname{Sp}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} = V$, så har vi en basis

Hvis ikke, så $\exists\, \bar{v} \in V$: $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{v}$ er lin. uafh.

Processen gentages med $\operatorname{Sp}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{v}\}$ ...

$\operatorname{Sp}\{\underbrace{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{v}_{j_1}, \dots, \bar{v}_{j_m}}_{\text{lin. uafh.}}\} = V$

Sætn. Ethvert ikke trivielt, endeligt dimensionalt vektorrum har en basis

bevis (konstruktivt)

vælg $\bar{v} \in V$, $\bar{v} \neq \bar{0}$

udvid $Sp\{\bar{v}\}$ til en basis

Sætn Forskellige baser for samme vektorrum indeholder samme antal basisvektorer

bevis antag $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$ og $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ begge er baser for V

$$\left.\begin{array}{l} \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m \text{ lin. uafh.} \\ Sp\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\} = Sp\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} \end{array}\right\} \Rightarrow m \leq k$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \text{ lin. uafh.} \\ Sp\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\} = Sp\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} \end{array}\right\} \Rightarrow k \leq m$$

altså $k = m$

Dimension af vektorrum

$\dim V$ = antallet af basisvektorer

Sætn. Ethvert system med flere end $\dim V$ vektorer er lineært afhængigt

Ækvivalent hermed:

Ethvert lin. uafh. system indeholder højst $\dim V$ vektorer

bevis $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ lin uafh. kan udvides til basis $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{v}_{k+1}, \dots, \bar{v}_{\dim V})$

Heraf $k \leq \dim V$

eks. $\dim\{\bar{0}\} = 0$ $\dim R = 1$ $\dim R^n = n$ $\dim P_n = n+1$