Egenværdier og egenvektorer - fortsat

Sætn. Egenvektorer hørende til forskellige egenværdier er lineært uafhængige.

Bevis: $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$ egenvektorer hørende til $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ for $i \neq j$

Indirekte, antag $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$ lin. afh.

$\Rightarrow \exists j > 1 : \bar{x}_j = c_1 \bar{x}_1 + \dots + c_{j-1} \bar{x}_{j-1}, \; j \leq r \quad *$

jf. for note om lineær afhængighed

vælg mindste j, der opfylder $*$,

så er $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{j-1}$ lin. uafh.

multiplikation af $*$ med A:

$$A\bar{x}_j = c_1 A\bar{x}_1 + \dots + c_{j-1} A\bar{x}_{j-1}$$

$$\Rightarrow \lambda_j \bar{x}_j = c_1 \lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + c_{j-1} \lambda_{j-1} \bar{x}_{j-1} \quad (1)$$

multiplikation af $*$ med λ_j:

$$\lambda_j \bar{x}_j = c_1 \lambda_j \bar{x}_1 + \dots + c_{j-1} \lambda_j \bar{x}_{j-1} \quad (2)$$

(2) subtrahereres fra (1):

$$\bar{0} = c_1 (\lambda_1 - \lambda_j) \bar{x}_1 + \dots + c_{j-1} (\lambda_{j-1} - \lambda_j) \bar{x}_{j-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{j-1} \text{ lin. uafh.} \\ \lambda_i \neq \lambda_j, \; i = 1, \dots, j-1 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = \dots = c_{j-1} = 0$$

$\Rightarrow \bar{x}_j = \bar{0}$, modstrid, da $\bar{x}_j$ er egenvektor

altså $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$ lin. uafh.

eks. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\bar{x}) = A\bar{x}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ -3 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & -3+\lambda \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left((-1-\lambda)(4-\lambda)+6\right)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = (3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$= 0$ for $\lambda = 1, 2, 3$

$\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{x} = r(1,1,1)$, $r \neq 0$

$\lambda = 2$: $\begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{x} = s(2,3,3)$, $s \neq 0$

$\lambda = 3$: $\begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{x} = t(1,3,4)$, $t \neq 0$

regnekontrol: $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \\ 1 & 6 & 12 \end{bmatrix}$

kontrol af lineær uafhængighed.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalisering

At diagonalisere en matrix vil sige at bestemme en diagonalmatrix, som er similar med den givne.

eks $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\bar{x}) = A\bar{x}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(bemærk $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$)

Hvorfra kommer $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$?

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$ for $\lambda = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

$\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\bar{x} = r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $r \neq 0$

$\lambda = 2$: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\bar{x} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s \neq 0$

Søjlerne i $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ er altså lin. uafh. egenvektorer

Sætn. En matrix kan diagonaliseres, når og kun når der findes en basisskiftmatrix med lineært uafhængige egenvektorer som søjlevektorer.

Bevis $\Rightarrow$: Antag, at A er $n \times n$, og $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ er lineært uafhængige egenvektorer hørende til A's egenværdier.

$$B = [\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n]$$

$$\begin{aligned} B^{-1}AB &= B^{-1}A[\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n] \\ &= B^{-1}[A\bar{b}_1 \dots A\bar{b}_n] \\ &= B^{-1}[\lambda_1\bar{b}_1 \dots \lambda_n\bar{b}_n] \\ &= [\lambda_1 B^{-1}\bar{b}_1 \dots \lambda_n B^{-1}\bar{b}_n] \\ &= [\lambda_1\bar{e}_1 \dots \lambda_n\bar{e}_n] \\ &= \lceil \lambda_1 \dots \lambda_n \rfloor = D \end{aligned}$$

$\Leftarrow$: Antag der findes en regulær matrix B, så

$$\begin{aligned} B^{-1}AB = D &\Rightarrow AB = BD \\ &\Rightarrow A\bar{b}_j = B\bar{d}_j = \lambda_j\bar{b}_j, \quad j = 1, \dots, n \\ &\Rightarrow \bar{b}_j \text{ er egenvektor}, \quad j = 1, \dots n \end{aligned}$$

$\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ er lin. uafh., da B er regular.

Korollar En $n \times n$ matrix med n forskellige egenværdier kan altid diagonaliseres

tidl. eks. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\bar{x}) = A\bar{x}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

vælg fx $\mathcal{B} = ((1,1,1), (2,3,3), (1,3,4))$

og dermed $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1} A B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (B diagonaliser A)

NB. Udregning overflødig !!!

Når der optræder egenværdier med alg. mult. > 1, er diagonalisering kun muligt, når for hver egenværdi den geom. mult. = den alg. mult.

eks. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\bar{x}) = A\bar{x}$, $A = \begin{bmatrix} -7 & -16 & 4 \\ 6 & 13 & -2 \\ 12 & 16 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & -16 & 4 \\ 6 & 13-\lambda & -2 \\ 12 & 16 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 5-\lambda \\ 6 & 13-\lambda & -2 \\ 0 & -10+2\lambda & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 13-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-5)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 13-\lambda & -8 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-5)^2 (13-\lambda-16)$$

$$= -(\lambda+3)(\lambda-5)^2 = 0 \text{ for } \lambda = \begin{cases} -3 \\ 5 \text{ (dobbeltrod)} \end{cases}$$

$\lambda = -3$: $\begin{bmatrix} -4 & -16 & 4 \\ 6 & 16 & -2 \\ 12 & 16 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -16 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{x} = r(-2, 1, 2)$, $r \neq 0$

$\lambda = 5$: $\begin{bmatrix} -12 & -16 & 4 \\ 6 & 8 & -2 \\ 12 & 16 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{x} = s(-4, 3, 0) + t(1, 0, 3)$, $(s,t) \neq (0,0)$

$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ diagonaliserer A til $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

eks. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\bar{x}) = A\bar{x}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ -4 & -6-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ -2-\lambda & -2-\lambda & 0 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda-4)$$

$$= -(\lambda+2)^2(\lambda-1) = 0 \quad \text{for } \lambda = \begin{cases} -2 & \text{(dobbeltrod)} \\ 1 \end{cases}$$

$\lambda = -2$: $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{x} = r(-1, 1, 0)$, $r \neq 0$

$\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{x} = s(1, -1, 1)$, $s \neq 0$

A kan ikke diagonaliseres

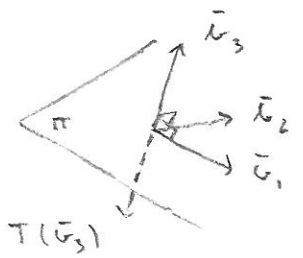
Potensopløftning

Antag, at A kan diagonaliseres

$$B^{-1}AB = D \iff A = BDB^{-1}$$

$$A^k = (BDB^{-1})(BDB^{-1}) \dots (BDB^{-1})$$
$$= BDD \dots DB^{-1}$$
$$= BD^kB^{-1}, \quad D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & & \\ & d_2^k & \\ & & \ddots \\ & & & d_n^k \end{bmatrix}$$

Spejling i plan



Vælg basis $B = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$

$T(\bar{v}_1) = \bar{v}_1$

$T(\bar{v}_2) = \bar{v}_2$

$T(\bar{v}_3) = -\bar{v}_3$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

T: spejling i planen π

Antag, at π er givet ved $3x - 4y + 5z = 0$

Bemærk $\mathrm{Nul}\,[3\ -4\ 5] = \mathrm{Sp}\{(4,3,0),\ (-5,0,3)\}$

dvs. $\mathcal{B} = ((4,3,0),\ (-5,0,3),\ (3,-4,5))$ kan

benyttes $\Rightarrow$ $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\det B = 4\cdot 12 - 3(-25-9) = 150$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{150}\begin{bmatrix} 12 & -15 & 9 \\ 34 & 20 & -12 \\ 20 & 25 & 15 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{150}\begin{bmatrix} 12 & 34 & 20 \\ -15 & 20 & 25 \\ 9 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\bar{x}) = A\bar{x}$

$$A = B\,[T]_{\mathcal{B}}\,B^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{150}\begin{bmatrix} 12 & 34 & 20 \\ -15 & 30 & 25 \\ 9 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{150}\begin{bmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 & 34 & 20 \\ -15 & 30 & 25 \\ 9 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{150}\begin{bmatrix} 96 & 22 & -90 \\ 22 & 54 & 120 \\ -90 & 120 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 16 & 12 & -15 \\ 12 & 9 & 20 \\ -15 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

System af homogene lineære første ordens differentialligninger

eks. $y' = 3y$, $y > 0$, $y = y(x)$

begyndelsesbetingelse: $y(0) = 1$

$\frac{y'}{y} = 3 \Rightarrow \ln y = 3x + c_1 \Rightarrow y = c\,e^{3x}$ *

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = c\cdot 1 \Rightarrow c = 1$

løsning på begyndelsesværdiproblemet:

$y = e^{3x}$

* c er en sakaldt arbitrær konstant

Et koblet system af ligninger:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n \\ y_2' &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n \end{aligned}\right\} \quad \text{skrives kort} \quad \bar{y}' = A\bar{y}$$

Antag, at A kan diagonaliseres, dvs. $\exists B$:

$$B^{-1}AB = D$$

Sæt $\bar{z} = B^{-1}\bar{y} \iff \bar{y} = B\bar{z}$ $\Rightarrow \bar{y}' = B\bar{z}'$ } indsættes i $\bar{y}' = A\bar{y}$

$$B\bar{z}' = AB\bar{z}' \iff \bar{z}' = B^{-1}AB\bar{z} = D\bar{z}$$

$$\bar{z}' = D\bar{z} \iff \left\{\begin{aligned} z_1' &= \lambda_1 z_1 \\ z_2' &= \lambda_2 z_2 \\ &\vdots \\ z_n' &= \lambda_n z_n \end{aligned}\right.$$

simple ligninger, som umiddelbart kan løses

Løsning for $\bar{y}$: $\bar{y} = B\bar{z}$

eks. $\bar{y}' = A\bar{y}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

begyndelsesbetingelse: $\bar{y}(0) = (-2, 4, 3)$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\big((-1-\lambda)(1-\lambda) - 0\big)$$
$$= -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$\lambda = -1$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\bar{x} = r\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $r \neq 0$

$\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\bar{x} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $s \neq 0$

$\lambda = 2$: $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\bar{x} = t\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$

$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ diagonaliser A til $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

dvs $\bar{z} = (c_1 e^{-x}, c_2 e^{x}, c_3 e^{2x})$ *

$$\Rightarrow \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{-x} \\ c_2 e^{x} \\ c_3 e^{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2c_1 e^{-x} + 2c_3 e^{2x} \\ c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} - c_3 e^{2x} \\ 3c_3 e^{2x} \end{bmatrix}$$

(c_1, c_2, c_3) bestemmes ud fra begyndelsesbetingelsen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \quad \text{dvs.} \quad (c_1, c_2, c_3) = (2, 3, 1)$$

Løsning:

$$\bar{y} = (-4e^{-x} + 2e^{2x},\ 2e^{-x} + 3e^{x} + e^{2x},\ 3e^{2x})$$

* c_1, c_2 og c_3 er arbitrære konstanter