Lineære ligningssystemer

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \begin{array}{l} m \text{ ligninger} \\ \text{med } n \\ \text{ubekendte} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \quad A\bar{x} = \bar{b}$, A: ligningssystemets koefficient-matrix

$\bar{b}$: ligningssystemets højreside

$[A \mid \bar{b}]$: ligningssystemets totalmatrix

(eng. augmented matrix)

Operationer på ligninger	Operationer på totalmatrix	
ombytte ligninger	ombytte rækker	række-operationer
mult. lign. med konst. $\neq 0$	mult. række med konst. $\neq 0$	
add. af et mult. af en lign. til en anden lign.	add. af et mult. af en række til en anden række	

↑

Fører til ækvivalente ligningssystemer,

dvs. ligningssystemer med samme løsningsmængde.

Matricer, der fremgår af hinanden ved rækkeoperationer, kaldes rækkeækvivalente.

eks.

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 0 \\ 6x + 3y - 8z &= 0 \\ 2x - y + 5z &= -4 \end{aligned}$$

Totalmatricen opstilles, og der udføres rækkeoperationer

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & -8 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

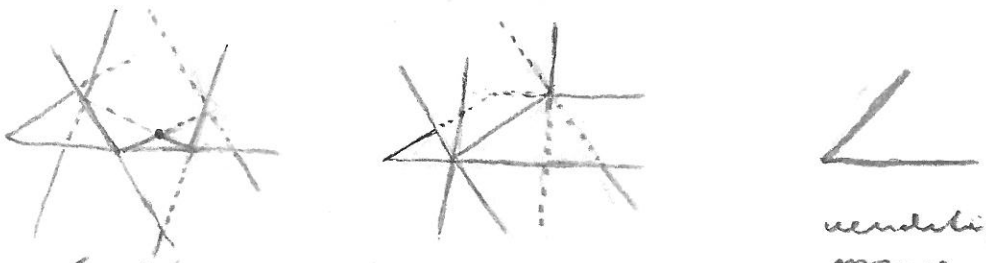
løsning: $(x, y, z) = (-1, 2, 0)$

Altid løsn.?

To lign. m. to ubek.

én løsn. | uendelig mange løsn. | ing. løsn.

Tre lign. m. tre ubek.



én løsn. | uendelig mange løsn. | uendelig mange løsn.

ing. løsn.

ing. løsn.

ing. løsn.

Én eller flere løsn.: Ligningssystemet er konsistent

Ing. løsn.: Ligningssystemet er inkonsistent

Løsningsmetode

Konstruer en række-echelonform ved benyttelse af rækkeoperationer, eks.

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x = pivotelement

Fortsæt til reduceret række-echelonform opnås:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Entydigt bestemt

Når flere variable end egentlige ligninger, sættes 'overskydende' variable lig med parametre.

Her fås simpleste regninger ved at sætte

$x_2 = r$, $x_5 = s$, $x_6 = t$, $r, s, t \in R$,

hvorefter x_1, x_3, x_4 og x_7 kan bestemmes.

eks. $x - 3y + z = 2$

$3x - 8y + 2z = 5$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -8 & 2 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

sæt $z = r$: $x - 2r = -1 \Rightarrow x = -1 + 2r$

$y - r = -1 \Rightarrow y = -1 + r$

dvs. $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

eller $(x, y, z) = (-1, -1, 0) + r(2, 1, 1)$, $r \in \mathbb{R}$

eks. $x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8$

$3x_1 - 7x_2 \qquad + x_4 = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -7 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & -24 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 5 & -28 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -12 \end{array}\right]$$

sæt $x_3 = r$, $x_4 = s$:

$x_1 - 7r + 5s = -28 \Rightarrow x_1 = -28 + 7r - 5s$

$x_2 - 3r + 2s = -12 \Rightarrow x_2 = -12 + 3r - 2s$

dvs. $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

eller

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-28, -12, 0, 0) + r(7, 3, 1, 0) + s(-5, -2, 0, 1)$,

$r, s \in \mathbb{R}$

Rang og nullitet af matrix

rang ~ antal pivotelementer i række-echonform

nullitet ~ antal søjler uden pivotelement

eks. $[A|\bar{b}] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

ing. lsn., da

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -1$$

aldrig kan opfyldes.

Bemærk nødv. og tilstr. bet. for konsistens:

$$\text{rang}\,[A|\bar{b}] = \text{rang}\,A$$

(i eks. ovenfor: $\text{rang}[A|\bar{b}] = 3 \neq \text{rang}\,A = 2$)

eks. bestem a, b, c, så polynomiet $a + bx + cx^2$ går gennem punkterne $(1,12)$, $(2,15)$, $(3,16)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 15 \\ 1 & 3 & 9 & 16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

dvs $(a, b, c) = (7, 6, -1)$ og dermed

$$a + bx + cx^2 = 7 + 6x - x^2$$

Bemærk, at når koefficientmatricen A er kvadratisk, så gælder

Netop én lsn. $\Leftrightarrow$ A er rækkeækvivalent med I

Lidt mere regneteknik

eks.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & -6 & -6 & 8 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

sæt $x_2 = r$

$x_4 = 3s$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$